

### Matematička grupa – 1. razred – RM1

1. Koja se znamenaka nalazi na 2006. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja  $\frac{469}{1998}$ ? (O 2006) (RJ: 3)
2. Odredi sve cijele brojeve  $n$  za koje je  $\frac{5n-23}{n-7}$  cijeli broj. (Ž 2006)  
(RJ:  $n \in \{-5,1,3,4,5,6,8,9,10,11,13,19\}$ )
3. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe  $x^2 + 11^2 = y^2$ . (Ž 2007) (RJ: 3)
4. Dokaži da je suma kubova triju uzastopnih prirodnih (cijelih) brojeva djeljiva sumom tih triju brojeva. (O 2006)
5. Koliko je  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  ako je  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$
6. Ako je  $3a - b + 2c + 5d = 11$  i  $a + 5b + 2c - d = 9$  koliko je  $a + b + c + d$ ?
7. Kvadrat nekog broja za 39 je veći od razlike trostrukog kvadrata njegovog prethodnika i dvostrukog kvadrata njegovog sljedbenika. Odredi broj.

### Matematička grupa – 1. razred – RM2

1. Ako umnošku triju uzastopnih parnih brojeva pribrojimo njihov dvostruki zbroj i oduzmemo kub srednjeg, dobit ćemo 20. Koji su to brojevi? (8, 10, 12)
2. Ako od kuba nekog neparnog broja  $n$  oduzmemo umnožak tri uzastopna neparna broja od kojih je srednji upravo  $n$ , dobit ćemo 28. Odredi broj  $n$ . ( $n=7$ )
3. Brojevi 5777 i 8924 podijeljeni istim prirodnim brojem  $n$  daju redom ostatke 20 i 36. Koji je to broj  $n$ ? (O 2006)
4. Dokaži matematičkom indukcijom da za sve  $n \in N$  vrijedi:
  - a.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
  - b.  $3 + 6 + 12 + \dots + 3 \cdot 2^{n-1} = 3(2^n - 1)$
5. Matematičkom indukcijom dokaži da za sve  $n \in N$  vrijedi:
  - a.  $9/7^n + 3n - 1$
  - b.  $11/6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$
  - c.  $6/n^3 + 11n$

### Matematička grupa – 1. razred – RM3

1. Ako je  $13x - 52y = 1$ , koliko je  $11x - 44y$ ? (RJ:  $\frac{11}{13}$ )
2. Ako je  $(4x - 2)(3x - 4) = 9$ , koliko je  $(3x - 1)(2x - 3)$ ? (RJ:  $\frac{7}{2}$ )
3. Za koje je cijele brojeve  $x$ ,  $y$  i  $z$  ispunjena jednakost  $(x - 2)(y + 1)(z - 3) = 1$ ?  
(RJ:  $(3,0,4), (1,-2,4), (1,0,2), (3,-2,2)$ )
4. Zbroj 33 uzastopna cijela broja je 891. Koji su to brojevi? (RJ:  $11,12,\dots,42,43$ )
5. Dokaži da je:
  - a. broj  $(2n + 3)(3n - 2) - (3n + 2)(2n - 3)$  djeljiv s 10, za svaki  $n \in N$ .
  - b. broj  $(2n + 3)(3n - 7) - (n + 1)(n - 1)$  djeljiv s 10, za svaki  $n \in N$ .
  - c. kvadrat svakog neparnog broja umanjen za 1 djeljiv s 8.
  - d. razlika kuba neparnog prirodnog broja i tog istog broja djeljiva je s 24.
  - e. broj  $(6n - 7)^2 - (4n - 3)^2$  djeljiv sa 40, za svaki  $n \in Z$ .
6. Ako između znamenki dvoznamenkastog broja upišemo taj isti broj, dobit ćemo broj koji je 77 puta veći od zadanog. Odredi taj dvoznamenkasti broj.  
(RJ: 15)
7. Koji je broj dvostruko veći od zbroja svojih znamenki? (RJ: 18)

### Matematička grupa – 1. razred – RM4

1. Dokaži da je umnožak dvaju neparnih brojeva neparan broj.
2. Ako se umnožak dvaju uzastopnih cijelih brojeva uveća za 1 i dobiveni zbroj kvadrira, dobiva se broj koji je jednak zbroju tri kvadrata.
3. Razlika  $n^3 - n$ ,  $n \in N$  uvijek je djeljiva s 3.
4. Ako brojevi  $a$  i  $b$  zadovoljavaju relaciju  $a + b = 1$ , onda izraz  $2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2)$  ne ovisi o  $a$  i  $b$ . Dokaži.

5. Ako za sve realne brojeve  $a, b, c$  vrijedi  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ , dokažite da vrijedi  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$ .
6. Rastavi na faktore:
- $ac(a+c) - bc(b+c) + ab(a-b) =$
  - $ab(a+b) - ac(a-c) + bc(b-c) =$
7. Ako je  $ax+by=0$  dokaži da je  $\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1$ .
8. Korištenjem identiteta  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  odredi  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ .  
Dokaži da dobivena relacija vrijedi za svaki prirodni broj  $n$ .
9. Korištenjem identiteta  $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$  odredi  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$ . Dokaži da dobivena relacija vrijedi za svaki prirodni broj  $n$ .
10. Odredi sumu:  $\frac{2}{2 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{2}{2003 \cdot 2006} + \frac{2}{2006 \cdot 2009} =$

### Matematička grupa – 1. razred – RM5

- Koliko je  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  ako je  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$ .
- Ako je  $3a - b + 2c + 5d = 11$  i  $a + 5b + 2c - d = 9$ , koliko je  $a + b + c + d$ ?
- Kvadrat nekog broja za 39 je veći od razlike trostrukog kvadrata njegovog prethodnika i dvostrukog kvadrata njegova sljedbenika.
- Dokaži da je  $\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$  uz uvjet  $a+b=1$ .
- Ako je  $a \neq c, a+b+c+d \neq 0$  dokaži da je  $\frac{(a+b)^2 + (a+d)^2 - (b+c)^2 - (c+d)^2}{(a+b)(a+d) - (c+b)(c+d)} = 2$ .
- Skrati razlomak:  $\frac{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}{b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a) + a^2b^2(a-b)} =$
- Ako je  $a > 0, b > 0, c > 0$  i  $b+c > a, c+a > b, a+b > c$ , dokaži da je:  $2(bc+ac+ab) > a^2+b^2+c^2$ .

8. Ako je  $b+c > a, c+a > b, a+b > c$ , dokaži da je

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) > 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

9. Dokaži da je  $x^2 + y^2 + z^2 \geq yz + xz + xy$ .

10. Dokaži da vrijedi  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$ .

### Matematička grupa – 1. razred – RM6

1. Riješi sustav nejednadžbi:  $-1 < \frac{2x-1}{2x+1} < 1$       RJ:  $x > 0$
2. Riješi jednadžbu  $a^2(x-2) = 4(x+a)$  gdje je  $a$  realni parametar. Za koje vrijednosti od  $a$  je  $x \leq 0$ ?      RJ:  $a \in [0, 2)$
3. Riješi nejednadžbu:  $1 + \frac{1}{(x-1)^2} > \frac{x+1}{x-1}$       RJ:  $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \setminus \{1\}$
4. Riješi jednadžbu:  $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 = \frac{1 + \frac{2a}{1+x}}{1 - \frac{2a}{1+x}}$
5. Riješi jednadžbu:  $\frac{3}{x^3-8} - \frac{1}{(x-2)^3} = \frac{3}{x^3+2x^2+4x}$       RJ:  $x = 1$
6. Riješi nejednadžbu:  $x^4 - 8x^2 - 9 < 0$       RJ:  $x \in (-3, 3)$
7. Koliko rješenja ima jednadžba:  $\frac{2}{x^2-5x+6} + \frac{3}{x^2-2x-3} = \frac{5}{x^2-x-2}$ ?

Zadaci na internetu:

<http://public.carnet.hr/mat-natj/zadaci-SS.htm>