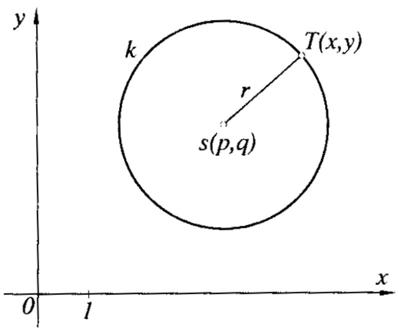
KRUŽNICA.

DEFINICIJA: Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su od čvrste točke ili **središta** jednako



udaljene. Udaljenost središta i bilo koje točke na kružnici označava se s $d(S,T)=r$ (43) i naziva se **polumjer kružnice.**

$k(S,r)=\{T(x,y):d(S,T)=r\}$ (44).

Jednadžba kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ (45) gdje je S(p,q) **središte**, a r **polumjer kružnice.** Ukoliko je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sutava, jednadžba glasi $x^2+y^2=r^2$ (46).

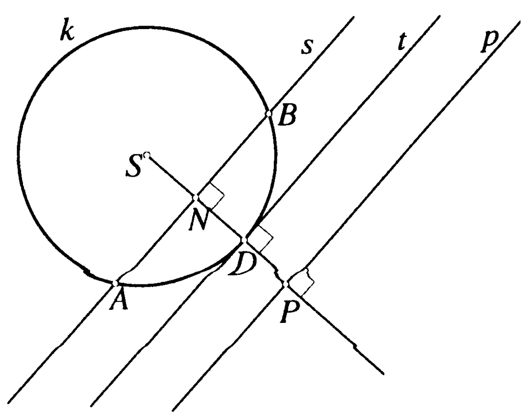
☺ **Primjer 1.** Napiši jednadžbu kružnice ako je središte u točki S(2,-3), a polumjer je 5.

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25 \Rightarrow k(2,-3;5)$$

☺ **Primjer 2.** Odredi središte i polumjer kružnice ako je zadana sa $k(-1,2;4)$.

$$k(-1,2;4) \Rightarrow (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=16 \Rightarrow S(-1,2), r=4$$

ODNOS PRAVCA I KRUŽNICE.



ODNOS PRAVCA I KRUŽNICE

s… pravac **siječe** kružnicu **k** $s \cap k = \{A, B\}$
t… pravac **dodiruje** kružnicu **k** $s \cap k = \{D\}$
p… pravac **ne siječe** kružnicu **k** $s \cap k = \{\ \}$

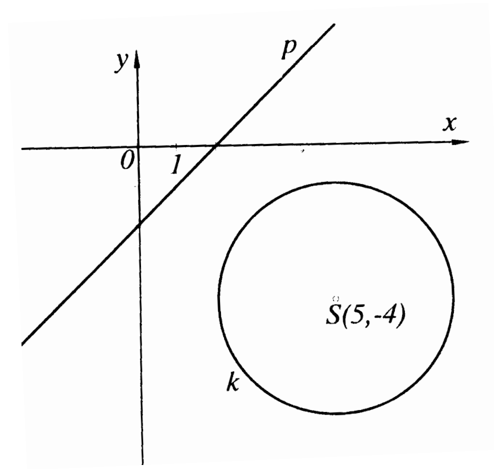
- Pravac i kružnica mogu biti u sljedeća tri odnosa:
  - pravac **siječe** kružnicu u dvije točke $s \cap k = \{A, B\}$ i naziva se **SEKANTA (s)**
  - pravac **dodiruje** kružnicu u jednoj točki $s \cap k = \{D\}$ i naziva se **TANGENTA (t)**
  - pravac **ne siječe** kružnicu $s \cap k = \varnothing$ **(p)**

☺ **Primjer 1.** U kojem su odnosu kružnica $(x-5)^2+(y+4)^2=9$ i pravac x – y – 2 = 0 ?

$(x-5)^2+(y+4)^2=9$
$x-y-2=0 \Rightarrow x=y+2$
$(y+2-5)^2+(y+4)^2=9$
$(y-3)^2+(y+4)^2=9$
$y^2-6y+9+y^2+8y+16-9=0$
$2y^2+2y+16=0 \quad /:2$
$y^2+y+8=0$
$D=b^2-4ac=1-32=-31$
$D<0$

izrazimo nepoznanicu x i uvrstimo je u jednadžbu kružnice

Ispitajmo ima li kvadratna jednadžba rješenja promatrajući ***diskriminantu***

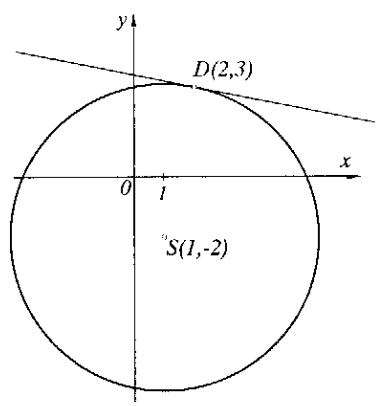


Kvadratna jednadžba nema relanih rješenja jer je diskriminanta manja od nule.

Zaključujemo da se pravac i kružnica ne sijeku.

☺ **Primjer 2.** U kojem su odnosu kružnica $x^2+y^2-2x+4y-21=0$ i pravac x + 5y = 17?

$x^2+y^2-2x+4y-21=0 \Rightarrow x^2-2x+y^2+4y=21$
$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4=-21 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=26 ... k(1,-2;\sqrt{26})$



$(x-1)^2+(y+2)^2=26$
$x+5y=17 \Rightarrow x=17-5y$

$(-5y+17-1)^2+(y+2)^2=26$
$(16-5y)^2+(y+2)^2=26$
$256-160y+25y^2+y^2+4y+4-26=0$
$26y^2-156y+234=0 \quad /:2$
$13y^2-78y+117=0$
$D=b^2-4ac=6084-6084=0$
$D=0$

$13y^2-78y+117=0$
$y_{1,2}=\dfrac{78\pm 0}{26}=3$
$x=17-5y=17-15=2$

D(2,3)

Određujemo točku dodira pravca i kružnice D(2,3)

Kvadratna jednadžba ima jedno dvostruku relano rješenje jer je diskriminanta jednaka nula.

Zaključujemo da se pravac i kružnica dodiruju.

NAPOMENA: Ako je diskriminanta dobivene kvadratne jednadžbe (kao u primjerima 1 i 2) veća od nule, tada pravac i kružnica imaju dvije točke presjeka . Kažemo da se pravac i kružnica sijeku. Zaključimo, diskriminanta određuje odnos pravca i kružnice i to:

- ako je **D < 0**, pravac i kružnica se **ne sijeku** (47)
- ako je **D = 0**, pravac i kružnica se **dodiruju** (48)
- ako je **D > 0**, pravac i kružnica se **sijeku** (49)

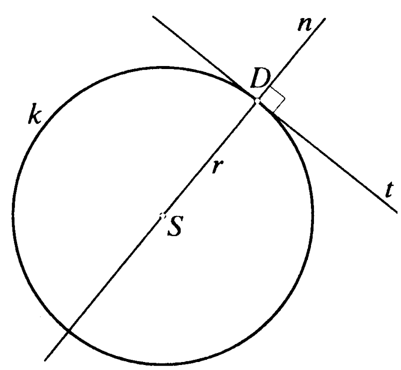
☺ **Primjer 3.** Odredi jednadžbu kružnice koja prolazi točkom T(4,3) sa središtem u točki S(2,1).

$$r = d(S,T) = \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow k\left(2,1;\sqrt{8}\right)$$

TANGENTA I NORMALA KRUŽNICE

Normala kružnice n uvijek prolazi središtem kružnice i točkom **D** na kružnici. Točkom D prolazi tangenta **t** koja je okomita na normalu. $t \perp n$



- **Tangenta** kružnice u točki kružnice $D(x_1, y_1)$

(50) $(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-q)=r^2$ ⇐ središte kružnice S(p,q)

(51) $xx_1 + yy_1 = r^2$ ⇐ središte kružnice S(0,0)

Ako sa točka $T(x,y)$ nalazi **izvan kružnice**, tada je moguće povući **dvije tangente** iz te točke na kružnicu.**(UVJET TANGENCIJALNOSTI)**

- Uvjet da je pravac $y = kx + l$ koji prolazi točkom $T(x,y)$ tangenta kružnice glasi

  $r^2(1+k^2) = (q - kp - l)^2$ (52) ili $r^2(1+k^2) = l^2$. (53)

NAPOMENA: Prije primjene formula za određivanje jednadžbi tangenata (50) do (53), potrebno je provjeriti nalazi se točka na kružnici ili ne.

☺ **Primjer 1.** Odredi jednadžbu tangente u točki $D(3, y < 0)$ kružnice $x^2 + y^2 = 25$.

Točka se nalazi na kružnici sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava S(0,0), pa ćemo koristiti formulu (51) za određivanje jednadžbe tangente u točki D.

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 3^2 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 25 - 9 \Rightarrow y^2 = 16 \quad /\sqrt{\ }$$
$$y_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow y = -4$$
$$D(3,-4)$$

zbog uvjeta iz točke D(3,y < 0),
*y = - 4 pa je točka **D(3,-4)***

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \quad (51)$$
$$3x - 4y = 25$$
$$-4y = -3x + 25 \quad /:(-4)$$
$$y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

uvrštavamo u jednadžbu tangente (51) i dobijemo jednadžbu tangente iz točke D na kružnici

☺ **Primjer 2.** Odredi jednadžbu tangente u točki $D(5, y > 0)$ kružnice $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Točka se nalazi na kružnici sa središtem u točki S(2,1), pa ćemo koristiti formulu (50) za određivanje jednadžbe tangente u točki D.

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow (5-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$
$$9 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow (y-1)^2 = 16 \quad /\sqrt{\ }$$
$$y - 1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4 + 1 = 5 \\ y_2 = -4 + 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 5$$
$$D(5,5)$$

zbog uvjeta iz točke D(5,y > 0),
*y = 5, pa je točka **D(5,5)***

$$(x-p)(x_1-p) + (y-q)(y_1-q) = r^2$$
$$(5-2)(x-2) + (5-1)(y-1) = 25$$
$$3(x-2) + 4(y-1) = 25$$
$$3x - 6 + 4y - 4 = 25$$
$$4y = -3x + 35 \quad /:4$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{35}{4}$$

uvrštavamo u jednadžbu tangente (50) i dobijemo jednadžbu tangente iz točke D na kružnici

☺ **Primjer 3.** Odredi jednadžbu tangente kružnice $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 5$ paralelne s $y = -2x$.

U ovom primjeru moramo koristiti uvjet tangencijalnosti (52).

$$r^2(1 + k^2) = (q - kp - l)^2$$
$$5(1+4) = (7 - (-2)(-2) - l)^2$$
$$25 = (7 - 4 - l)^2$$
$$25 = (3 - l)^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$3 - l = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 3 - 5 = -2 \\ l_1 = 3 + 5 = 8 \end{cases}$$

pravac i tangenta su paralelni pa je koeficijent tangente jednak koeficijentu pravca $k_2 = k_1 = -2$

$$t_1 \ldots y = kx + l \Rightarrow y = -2x - 2$$
$$t_1 \ldots y = kx + l \Rightarrow y = -2x + 8$$

Dvije paralelne tangentesu rješenje primjera 3.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredi jednadžbu kružnice sa središtem u točki S(2,-3) koja prolazi točkom T(4,1).
2. Odredi jednadžbu tangente kružnice $k\left(-2{,}7;\sqrt{5}\right)$ koja je okomita na pravac $y+3x-5=0$.
3. Odredi jednadžbu tangente na kružnicu $x^2+y^2=20$ u točki D(2,y>0).
4. Odredi tangente na kružnicu $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ iz točke T(3,4).
5. U kojem su odnosu pravac $7x-17y+169=0$ i kružnica $x^2+y^2=169$?
6. U kojem su odnosu pravac $2x+y=9$ i kružnica $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$?

- **UPUTA** (zadatak 3): Ukoliko **tangenta** kružnice $y=kx+l$ **prolazi točkom** T(3,4), tada možemo pisati $y=kx+l \Rightarrow 4=3k+l$ te izrazimo **odsječak** $l=4-3k$ i uvrstimo u uvijet tangencijalnosti (52) ili (53)