

2r - PRIPREMA ZA NATJECANJE IZ MATEMATIKE (1)

1. Odredi sve kompleksne brojeve z takve da $\operatorname{Re} z = 5 \operatorname{Im} z$ i $|z - (a + ib)| = 5$ gdje su a i b ($a > b$) rješenja kvadratne jednadžbe $(x-1)^2 + 3(x-1) - 4 = 0$
(RJ: $z_1 = 5 + i, z_2 = -\frac{30}{13} - \frac{6}{13}i$) (O 2006)
2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3}$ i $\left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1$.
(RJ: $z_1 = 6 + 17i, z_2 = 6 + 8i$) (O 2006 4r)
3. Ako je $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ rješenje jednadžbe $x^3 - 1 = 0$, koliko je $(1 - z + z^2)(1 + z - z^2)$?
(RJ: 4) (O 2007)
4. Ako je $z + \frac{1}{z} = 1$ koliko je $z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}}$?
(RJ: -2) (O 2007 A)
5. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja $\left(\frac{i-1}{1+i} \right)^n$ u ovisnosti o prirodnom broju n . (O 2008)
6. Odredi sva rješenja sustava jednadžbi:
$$\begin{cases} |z+1+8i|^2 - |z+2+i|^2 = 100 \\ |z-5| = 5 \end{cases}$$

(RJ: $z_1 = 8 + 4i, z_2 = 1 + 3i$) (Ž 2007)
7. Nađi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\left| \frac{1}{z-i} + 1 \right| = 1$ i $\left| \frac{1}{z-i} - i \right| = 1$
(RJ: $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$) (Ž 2002)
8. U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{x+7}$
(RJ: $x = 6$) (O 2007)
9. U pravokutnom trokutu zbroj kvadrata duljina svih stranica iznosi 1682, a opseg trokuta je 70. Izračunaj duljine stranica trokuta.
(RJ: 20,21,29) (O 2007)