



## 2R – Zadaci sa općinskih / županijskih natjecanja iz matematike

1. Odredite sumu

$$\frac{2}{2 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{2}{1997 \cdot 2000} + \frac{2}{2000 \cdot 2003}.$$

2. Ako za realne brojeve  $a, b, c$  vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

dokažite da je

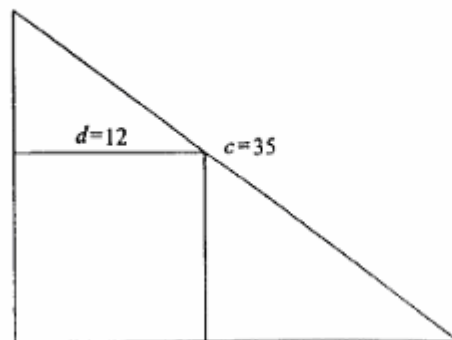
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

3. Neka su  $z_1$  i  $z_2$  kompleksni brojevi modula 1. Dokažite da je

$$\frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2}$$

realan broj.

4. U pravokutan trokut s hipotenuzom duljine  $c = 35$  upisan je kvadrat sa stranicom duljine  $d = 12$ , kao na slici. Odredite duljine kateta tog trokuta.



5. Odredite sva rješenja jednadžbe  $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$ .

6. Za koje realne brojeve  $a$  je najmanja vrijednost funkcije

$$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$$

na intervalu  $[0, 2]$  jednaka 3?

┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌

7. Dana je funkcija  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ , za koju vrijedi:

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}, \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{Z}.$$

Ako je  $f(1) = 2$ , odredite  $f(2004)$ .

┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌

8. Riješite sistem jednažbi

$$|x + y - 4| = 5,$$

$$|x - 3| + |y - 1| = 5.$$

┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌

9. Nađite skup kompleksnih brojeva  $z$  za koje je

$$\text{Im}(z^4) = (\text{Re}(z^2))^2$$

i skicirajte ga u kompleksnoj ravnini.

┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌

10. Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}}.$$

Odredite  $f(1) + f(2) + \dots + f(2003)$ .

┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌ ┌