1.

3. Danu sumu možemo prikazati na ovaj način:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{2}{1997\cdot 2000}+\frac{2}{2000\cdot 2003}\\
=\;&\frac{2}{3}\left(\frac{5-2}{2\cdot 5}+\frac{8-5}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{2000-1997}{1997\cdot 2000}+\frac{2003-2000}{2000\cdot 2003}\right)\\
=\;&\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{1997}-\frac{1}{2000}+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2003}\right)\\
=\;&\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2003}\right)=\frac{667}{2003}.
\end{aligned}$$

25 bodova

2.

4. Jednakost

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$$

množimo redom s a, b, c i dobivene jednakosti zbrojimo. 10 bodova

Dobiva se

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\\
=\;&a+b+c-\frac{ab+bc}{c+a}-\frac{ac+bc}{a+b}-\frac{ab+ac}{b+c}\\
=\;&0.
\end{aligned}$$

15 bodova

3.

1. Kako je

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}\\
&=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}\\
&=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{(\sqrt[3]{x+1})^3-(\sqrt[3]{x-1})^3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right),
\end{aligned}$$

15 bodova

imamo

$$\begin{aligned}
&f(1)+f(2)+\ldots+f(2002)+f(2003)\\
=\;&\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{1}+\ldots+\sqrt[3]{2003}-\sqrt[3]{2001}+\sqrt[3]{2004}-\sqrt[3]{2002}\right)\\
=\;&\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2004}+\sqrt[3]{2003}-1\right).
\end{aligned}$$

10 bodova

4. 3. *Prvo rješenje.* Prema uvjetu zadatka je $1 = |z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1$, odakle je $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$. Analogno je $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$. 5 bodova

Neka je

$$z = \frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2}\,.$$

Tada je

$$\bar{z} = \frac{1 - \bar{z}_1\bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} = \frac{1 - \dfrac{1}{z_1 z_2}}{\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_2}} = \frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2}\,. \qquad \text{15 bodova}$$

Kako je $\bar{z} = z$, traženi broj je realan. 5 bodova

Drugo rješenje. Stavimo $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. Zbog $|z_1| = |z_2| = 1$ vrijedi $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. 5 bodova

Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2} &= \frac{1 - ac + bd - i(ad + bc)}{(a - c) + i(b - d)} \cdot \frac{(a - c) - i(b - d)}{(a - c) - i(b - d)} \\
&= \frac{a - c - a^2c + ac^2 + ad^2 - b^2c}{(a - c)^2 + (b - d)^2} \\
&\quad + \frac{i(b - d + a^2d - bc^2 + b^2d - bd^2)}{(a - c)^2 + (b - d)^2}\,.
\end{aligned}$$

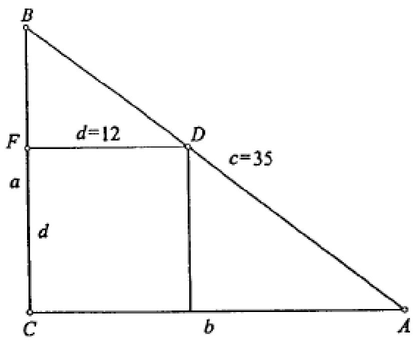
15 bodova

Treba provjeriti da je imaginarni dio jednak nuli:

$$b - d + a^2d - bc^2 + b^2d - bd^2 = b - d + d(a^2 + b^2) - b(c^2 + d^2) = b - d + d - b = 0\,. \quad \text{5 bodova}$$

5. 4. Ako su a i b katete i $c = 35$ hipotenuza, vrijedi

$$a^2 + b^2 = 35^2 = 1225 \qquad \text{5 bodova}$$



S druge strane, iz sličnosti trokuta ABC i DBF dobivamo

$$\frac{a}{b} = \frac{a - d}{d} \quad \Longrightarrow \quad d(a + b) = ab \quad \text{tj.} \quad 12(a + b) = ab. \qquad \text{5 bodova}$$

Riješimo sustav $a^2 + b^2 = 1225, \quad 12(a + b) = ab$. Kako je $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, stavimo $x = a + b$, $y = ab$. Tada je

$$x^2 - 2y = 1225, \quad 12x = y \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 24x - 1225 = 0\,.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$x_1 = 49, \quad x_2 = -25\ , \quad \text{i dalje,} \quad y_1 = 588\ , \quad y_2 = -300\ .$$

Zadovoljava samo $x_1 = 49$ i $y_1 = 588$. 5 bodova

Sada je $a + b = 49$ i $ab = 588$, pa su a i b rješenja kvadratne jednadžbe

$$t^2 - 49t + 588 = 0\ .$$

Slijedi $a_1 = 21$, $b_1 = 28$ ili $a_2 = 28$, $b_2 = 21$, pa su duljine kateta danog trokuta 21 i 28. 10 bodova

6. 3. Kako 0 nije rješenje jednadžbe, dijeljenjem s x^2 dobije se

$$x^2 - x - 10 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0\ . \qquad \text{5 bodova}$$

Uvedemo li supstituciju $t = x - \dfrac{2}{x}$, tada je $t^2 = x^2 - 4 + \dfrac{4}{x^2}$, tj. $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = t^2 + 4$.

Jednadžba sada poprima oblik

$$t^2 + 4 - t - 10 = 0 \qquad \text{tj.} \qquad t^2 - t - 6 = 0. \qquad \text{5 bodova}$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = 3$, $t_2 = -2$. 5 bodova

Za $t = 3$ je $x - \dfrac{2}{x} = 3$, tj. $x^2 - 3x - 2 = 0$ i rješenja su $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. 5 bodova

Za $t = -2$ je $x - \dfrac{2}{x} = -2$, tj. $x^2 + 2x - 2 = 0$ i rješenja su $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}$. 5 bodova

7. 1. *Prvo rješenje.* Koristeći svojstvo funkcije,

$$f(x+1) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}, \qquad \text{za } x \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

i početni uvjet

$$f(1) = 2, \tag{2}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
f(2) &= \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = -3\ ,\\
f(3) &= \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = -\frac{1}{2}\ ,\\
f(4) &= \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3}\ ,\\
f(5) &= \frac{1+f(4)}{1-f(4)} = 2 = f(1)\ ,\\
f(6) &= \frac{1+f(5)}{1-f(5)} = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = -3 = f(2)\ ,\\
f(7) &= \frac{1+f(6)}{1-f(6)} = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = -\frac{1}{2} = f(3)\ ,\\
f(8) &= \frac{1+f(7)}{1-f(7)} = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3} = f(4)\ ,
\end{aligned}$$

Odavde slijedi $f(n+4) = f(n)$ za $n \in \mathbf{N}$. 15 bodova

Konačno je

$$f(2004) = f(2000) = f(1996) = \ldots = f(4) = \frac{1}{3}\,. \qquad \text{10 bodova}$$

Drugo rješenje. Za prirodan broj n i danu funkciju f vrijedi:

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= \frac{1+f(n)}{1-f(n)}\,,\\
f(n+2) &= \frac{1+f(n+1)}{1-f(n+1)} = \frac{1+\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}}{1-\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}} = -\frac{1}{f(n)}\,,\\
f(n+4) &= -\frac{1}{f(n+2)} = f(n)\,.
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija f ima svojstvo $f(n+4) = f(n)$. 15 bodova

Sada je $f(2004) = f(2000) = f(1996) = \ldots = f(4) = \dfrac{1}{3}\,.$ 10 bodova

2. *Prvo rješenje.* Dani sistem jednadžbi se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
|x+y-4| &= 5,\\
|x-3|+|y-1| &= 5,\\
|x+y-4| &= |x-3|+|y-1|,
\end{aligned}$$

gdje, zbog $x+y-4 = x-3+y-1$, moraju $x-3$ i $y-1$ biti istog predznaka. 5 bodova

Stoga sistem možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
|x+y-4| &= 5,\\
|x-3|+|y-1| &= 5,\\
(x-3)(y-1) &\geq 0.
\end{aligned}$$

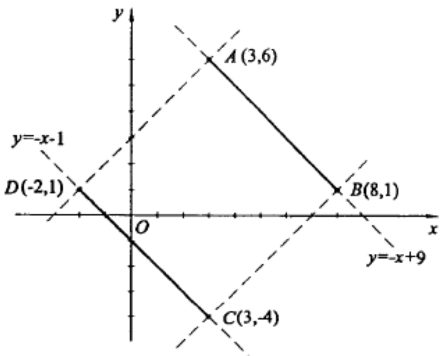
Ovaj sistem se svodi na sljedeća dva

$$\begin{aligned}
|x+y-4| &= 5,\\
|x-3|+|y-1| &= 5,\\
x-3 &\geq 0,\\
y-1 &\geq 0;
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
|x+y-4| &= 5,\\
|x-3|+|y-1| &= 5,\\
x-3 &\leq 0,\\
y-1 &\leq 0,
\end{aligned}$$

koja su ekvivalenta s

$$\begin{aligned}
x+y &= 9,\\
x &\geq 3,\\
y &\geq 1,
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x+y &= -1,\\
x &\leq 3,\\
y &\leq 1.
\end{aligned}$$

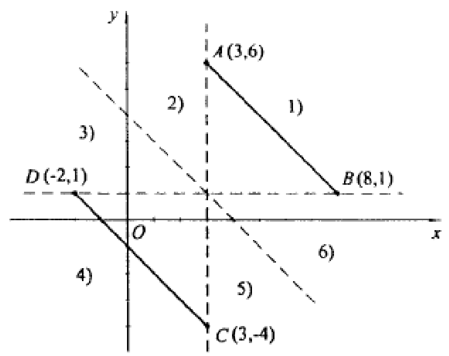
10 bodova



U prvom slučaju zadovoljavaju točke $(x, 9-x)$ za $x \in [3,8]$,
tj. dio pravca $y = 9 - x$ unutar područja $x \geq 3$ i $y \geq 1$. 5 bodova

U drugom slučaju zadovoljavaju točke $(x, -1-x)$ za $x \in [-2,3]$,
tj. dio pravca $y = -1 - x$ unutar područja $x \leq 3$ i $y \leq 1$. 5 bodova

Drugo rješenje. Izrazi pod apsolutnom vrijednosti mijenjaju predznak kada je $x + y - 4 = 0$, $x - 3 = 0$, odnosno $y - 1 = 0$. Ta tri pravca dijele ravninu na šest područja (vidi sliku). Na svakom od njih rješavamo sustav linearnih jednadžbi bez apsolutnih vrijednosti.



5 bodova

$$
\begin{aligned}
1)\quad & x + y - 4 = 5 && \Rightarrow && x + y = 9, \\
& x - 3 + y - 1 = 5 && \Rightarrow && x + y = 9.
\end{aligned}
$$

Rješenje je dio pravca $x + y = 9$ unutar područja 1), tj. točke $(x, 9-x)$ za $3 \leq x \leq 8$. 4 boda

$$
\begin{aligned}
2)\quad & x + y - 4 = 5 && \Rightarrow && x + y = 9 && x = 3, \\
& -x + 3 + y - 1 = 5 && \Rightarrow && -x + y = 3 && y = 6.
\end{aligned}
$$

Točka $(3, 6)$ već je dobivena pod 1). 3 boda

$$
\begin{aligned}
3)\quad & -x - y + 4 = 5 && \Rightarrow && x + y = -1 && x = -2, \\
& -x + 3 + y - 1 = 5 && \Rightarrow && -x + y = 3 && y = 1.
\end{aligned}
$$

Rješenje je točka $(-2, 1)$. 3 boda

$$\begin{array}{llll} 4) & -x-y+4=5 & \Rightarrow & x+y=-1. \\ & -x+3-y+1=5 & \Rightarrow & x+y=-1. \end{array}$$

Rješenje je dio pravca $x+y=-1$ unutar područja 4). tj. točke $(x,-1-x)$ za $-2 \leq x \leq 3$. 4 boda

$$\begin{array}{llllll} 5) & -x-y+4=5 & \Rightarrow & x+y=-1 & & x=3, \\ & x-3-y+1=5 & \Rightarrow & x-y=7 & & y=-4. \end{array}$$

Točku $(3,-4)$ već smo dobili pod 4). 3 boda

$$\begin{array}{llllll} 6) & x+y-4=5 & \Rightarrow & x+y=9 & & x=8, \\ & x-3-y+1=5 & \Rightarrow & x-y=7 & & y=1. \end{array}$$

Točku $(8,1)$ već smo dobili pod 1). 3 boda

9. **2.** Neka je $z=x+iy$. Tada je $z^2=x^2-y^2+i\cdot 2xy$,
$z^4=x^4-6x^2y^2+y^4+i\cdot(4x^3y-4xy^3)$. 5 bodova

Tada iz uvjeta $\mathrm{Im}\,(z^4)=\left(\mathrm{Re}\,(z^2)\right)^2$ slijedi

$$4x^3y-4xy^3=(x^2-y^2)^2,$$

$$4xy(x^2-y^2)-(x^2-y^2)^2=0,$$

$$(x^2-y^2)(4xy-x^2+y^2)=0.$$

5 bodova

Sada moramo promatrati dva slučaja: 1° $y^2=x^2$, i 2° $y^2+4xy-x^2=0$. 2 boda

U prvom slučaju je $y=\pm x$, i zadovoljavaju sve točke pravaca $y=\pm x$. 3 boda

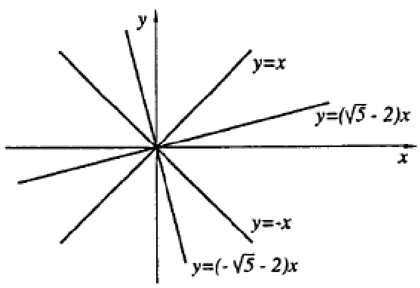
U drugom slučaju, podijelivši jednadžbu sa x^2, dobivamo kvadratnu jednadžbu po $\dfrac{y}{x}$,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+4\left(\frac{y}{x}\right)-1=0,$$

čija rješenja su

$$\frac{y}{x}=-2\pm\sqrt{5}.$$

Time smo dobili još dva pravca $y=(-2\pm\sqrt{5})x$. 8 bodova



Traženi skup točaka su četiri pravca skicirana na slici. 2 boda

10.

2. Minimalna vrijednost funkcije $f(x)$ na skupu realnih brojeva poprima se za $x = \frac{a}{2}$, (ovo je tjeme parabole). 4 boda

Moramo razmotriti tri slučaja:

1) Za $\frac{a}{2} \in [0,2]$ tj. $a \in [0,4]$ moralo bi biti

$$f(\frac{a}{2}) = 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4a \cdot \frac{a}{2} + a^2 - 2a + 2 = 3$$

odakle slijedi $a = -\frac{1}{2} \notin [0,4]$, što nije moguće. 7 bodova

2) Za $\frac{a}{2} < 0$, tj. $a < 0$ funkcija $f(x)$ je rastuća na intervalu $[0,2]$, te ima minimum za $x = 0$. Iz $f(0) = a^2 - 2a + 2 = 3$ dobiva se $a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Zbog $a < 0$ je $a = 1 - \sqrt{2}$. 7 bodova

3) Za $\frac{a}{2} > 2$, tj. $a > 4$, funkcija $f(x)$ pada na intervalu $[0,2]$, pa poprima najmanju vrijednost za $x = 2$. U ovom slučaju je

$$f(2) = 16 - 8a + a^2 - 2a + 2 = 3, \text{ tj. } a^2 - 10a + 15 = 0.$$

Odavde se dobiva $a_{1,2} = 5 \pm \sqrt{10}$. Zbog $a > 4$ je $a = 5 + \sqrt{10}$.
Dakle, uvjeti zadatka su zadovoljeni za $a = 1 - \sqrt{2}$ i $a = 5 + \sqrt{10}$. 7 bodova