



GIMNAZIJA I STRUKOVNA ŠKOLA JURJA DOBRILE PAZIN

NASTAVNI PREDMET: MATEMATIKA 3

Analitička geometrija u ravnini.

GORTAN ROBERT

TABLICA SADRŽAJA

3. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNINI	3
3.1. udaljenost točaka u ravnini.....	3
3.2. polovište dužine.....	3
3.3. površina trokuta.....	3
3.4. težište trokuta.....	4
4. OBLICI JEDNADŽBE PRAVACA	5
4.1. implicitni oblik jednadžbe pravca.....	5
4.2. eksplicitni oblik jednadžbe pravca.....	5
4.3. segmentni oblik jednadžbe pravca.....	5
4.4. jednadžbe pravca kroz jednu i dvije točke.....	6
4.5. jednadžba pravca kroz jednu točku.....	6
4.6. jednadžba pravca kroz dvije točke.....	7
5. PARALELNOST I OKOMITOST PRAVACA	7
6. PRESJEK DVAJU PRAVACA	8
7. KRUŽNICA	9
7.1. odnos pravca i kružnice.....	9
7.2. tangenta i normala kružnice.....	11

3. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNINI.

3.1. UDALJENOST TOČKA U RAVNINI.

Ako su zadane dvije točke u koordinatnom sustavu, kako odrediti njihovu udaljenost?

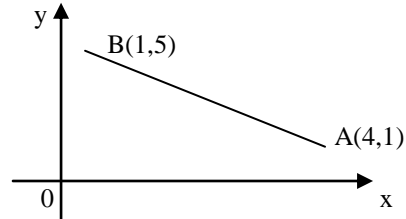
$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \rightarrow |AB| = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (28)$$

☉ **Primjer 1.** Odredi udaljenost točaka A(4,1) i B(1,5).

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 1)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$



3.2. POLOVIŠTE DUŽINE.

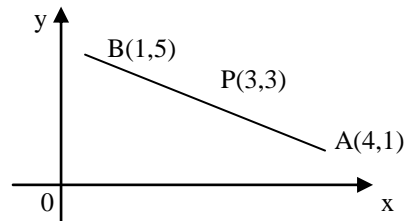
Ako su zadane dvije točke i njihova spojnica dužina, kako odrediti **polovište** ili točku koja dijeli dužinu na dva jednaka dijela?

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \rightarrow x_P = \frac{x_A + x_B}{2}, y_P = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad (29)$$

☉ **Primjer 1.** Odredi polovište dužine AB ako su A(4,1) i B(2,5).

$$P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{1 + 5}{2}\right) \Rightarrow P(3,3) \text{ poloviste duzine}$$



3.3. POVRŠINA TROKUTA.

Ako su zadane tri točke u koordinatnom sustavu, kako izračunati **površinu trokuta** što ga te tri točke određuju?

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \quad P = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| \quad (30)$$

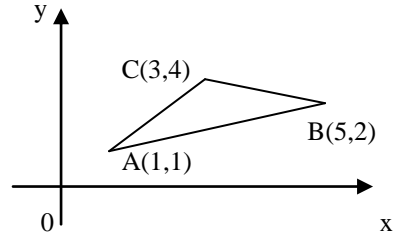
NAPOMENA: Ako su točke trokuta orijentirane u smjeru kazaljke na satu, površina bi bila negativna pa je stoga u formulu uključena i apsolutna vrijednost.

⊙ **Primjer 1.** Odredi površinu trokuta ΔABC ako su $A(1,1), B(5,2)$ i $C(3,4)$.

$$P = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$P = \frac{1}{2} |1(2 - 4) + 5(4 - 1) + 3(1 - 2)|$$

$$P = \frac{1}{2} |-2 + 15 - 3| = \frac{1}{2} |10| = 5 \text{ kv.jedinica}$$



NAPOMENA: Površinu trokuta moguće je izračunati i po Heronovoj formuli

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (31) \quad \text{gdje je } s \text{ poluopseg trokuta } s = \frac{a+b+c}{2} \quad (32).$$

➤ a, b i c su duljine stranica trokuta (formula (28)) $a = d(B, C), b = d(A, C), c = d(A, B)$.

3.4. TEŽIŠTE TROKUTA.

Ako su zadane tri točke u koordinatnom sustavu, kako izračunati **težište trokuta** što ga te tri točke određuju?

- **Težište** je točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta.
- **Težišnice** su dužine koje spajaju vrh trokuta i polovište nasuprotne stranice.

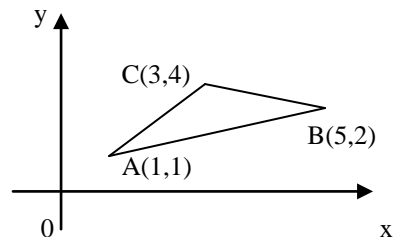
$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \rightarrow T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \quad (33) \quad T(x_T, y_T)$$

⊙ **Primjer 1.** Odredi koordinate težišta trokuta ΔABC ako su $A(1,1), B(5,2)$ i $C(3,4)$.

$$T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

$$T\left(\frac{1+5+3}{3}, \frac{1+2+4}{3}\right)$$

$$T\left(3, \frac{7}{3}\right) \text{ težište trokuta ABC}$$



⊙ **Primjer 2.** Odredi duljinu težišnice iz vrha A u trokutu iz primjera 1.

$$P\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \quad (29)$$

$$P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow P(4,3)$$

$$|t_A| = d(A, P) \quad \text{spojnica točaka } A(1,1) \text{ i } P(4,3)$$

$$d(A, P) = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} \quad (28)$$

$$d(A, P) = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

4. OBLICI JEDNADŽBE PRAVACA.

Postoje tri karakteristična oblika jednadžbe pravca.

4.1. IMPLICITNI OBLIK JEDNADŽBE PRAVACA.

A, B i C su tri realna broja $A, B, C \in \mathfrak{R}$ takva da A i B nisu u isto vrijeme jednaki 0 $B = 0, C \neq 0$ ili $C = 0, B \neq 0$. Implicitni oblik jednadžbe pravca glasi $Ax + By + C = 0$. (34)

4.2. EKSPPLICITNI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA

Ako su k i l realni brojevi $k, l \in \mathfrak{R}$, k je koeficijent pravca, a l odsječak na osi y.

EksPLICITNI oblik jednadžbe pravca glasi $y = kx + l$ (35)

$$\begin{array}{ll} Ax + By + C = 0 & y = kx + l \text{ gdje je} \\ By = -Ax - C \quad /: B & k = -\frac{A}{B} \text{ koeficijent smjera} \\ y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} & l = -\frac{C}{B} \text{ odsjecak na osi y} \end{array}$$

4.3. SEGMENTNI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA

Ako su m i n realni brojevi $m, n \in \mathfrak{R}$, m je odsječak na osi x, a n odsječak na osi y.

Segmentni oblik jednadžbe pravca glasi $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ (36)

$$\begin{array}{ll} Ax + By + C = 0 & \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \\ Ax + By = -C \quad /: (-C) & \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \\ -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1 & m = -\frac{C}{A} \text{ odsjecak na osi x} \\ \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 & n = -\frac{C}{B} \text{ odsjecak na osi y} \end{array}$$

© **Primjer 1.** Pretvori u ostale oblike jednadžbu pravca $2x + 4y - 6 = 0$.

$$\begin{array}{ll} 4y = -2x + 6 \quad /: 4 & 2x + 4y = 6 \quad /: 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ eksplicitni oblik} & \frac{2x}{6} + \frac{4y}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1 \text{ segmentni oblik} \end{array}$$

☉ **Primjer 2.** Pretvori u ostale oblike jednadžbu pravca $3x + 6y - 18 = 0$ te nacrtaj pravac.

$3x + 6y - 18 = 0$
 $6y = -3x + 18 \quad /: 6$
 $y = -\frac{1}{2}x + 3$
 $k = -\frac{1}{2}$ koeficijent pravca
 $l = 3$ odsjecak na osi y
 eksplicitni oblik jednadžbe pravca

$3x + 6y - 18 = 0$
 $3x + 6y = 18 \quad /: 18$
 $\frac{3x}{18} + \frac{6y}{18} = 1$
 $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$
 $m = 6$ odsjecak na osi x
 $n = 3$ odsjecak na osi y
 segmentni oblik jednadžbe pravca

NAPOMENA: Kod crtanja eksplicitnog oblika jednadžbe pravca, prvo ucrtamo **odsječak na osi y** i dobijemo točku A(0,3). Od te točke crtamo koeficijent pravca tako da **brojnik crtamo po osi y, a nazivnik po osi x**.

- u primjeru 2. ucrtali smo točku A(0,3). Od te točke crtamo koeficijent pravca $k = \frac{-1}{2}$ tako da od A(0,3) idemo **1 dole** po osi y te **2 desno** po osi x. Dobijemo točku B(2,2). Spojimo te dvije točke i dobili smo pravac $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

4.4. JEDNADŽBE PRAVACA KROZ JEDNU I DVIJE TOČKE.

Kako odrediti jednadžbu pravca ako su zadane dvije točke ili ako nam je poznata jedna točka i koeficijent smjera?

4.5. JEDNADŽBA PRAVCA KROZ JEDNU TOČKU.

Zadana je jedna točka $T(x_1, y_1)$ i koeficijent smjera pravca koji prolazi točkom T.

Jednadžba tog pravca glasi $y - y_1 = k(x - x_1)$. (37) **Koeficijent smjera** predstavlja tangens kuta što ga pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi x. $k = \text{tg}\alpha$ (38)

☉ **Primjer 1.** Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom T(1,2) i ima koeficijent smjera k=3.

$$\begin{array}{ll}
 T(1,2), k = 3 & y - 2 = 3x - 3 \\
 y - y_1 = k(x - x_1) & y = 3x - 3 + 2 \\
 y - 2 = 3(x - 1) & y = 3x - 1
 \end{array}$$

4.6. JEDNADŽBA PRAVCA KROZ DVIJE TOČKE.

Zadane su dvije točke $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$. Jednadžba pravca kroz dvije točke glasi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (39) \quad \text{gdje je} \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (40) \quad \text{koeficijent smjera pravca.}$$

☉ **Primjer 1.** Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkama $T_1(1,2)$ i $T_2(4,5)$. Koliki kut zatvara pravac s pozitivnim smjerom osi x ?

$$\begin{array}{lll} T_1(1,2), T_2(4,5) & y - 2 = \frac{3}{3}(x - 1) & k = \operatorname{tg} \alpha \\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) & y - 2 = x - 1 & \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad / \arctg \\ & y = x - 1 + 2 & \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \\ y - 2 = \frac{5 - 2}{4 - 1} (x - 1) & y = x + 1 & \end{array}$$

5. PARALELNOST I OKOMITOST PRAVACA.

Zadana su dva pravca $p_1 \dots y = k_1 x + l_1, p_2 \dots y = k_2 x + l_2$.

➤ Pravci su **paralelni** ako su im koeficijenti jednaki tj. $k_1 = k_2$ (41).

➤ Pravci su **okomiti** ako su im koeficijenti suprotni i recipročni brojevi, tj. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ (42)

☉ **Primjer 1.** Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(-1,2)$ i :

a) paralelan je pravcu $y - 2x - 1 = 0$

b) okomit je na pravac $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

$$y - 2x - 1 = 0$$

$$y = 2x + 1 \Rightarrow k_2 = 2$$

$$k_1 = k_2 \Rightarrow k_1 = 2 \quad \text{paralelni pravci}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \quad /3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}$$

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_1 = \frac{2}{3} \quad \text{okomiti pravci}$$

a) $y - y_1 = k_1(x - x_1)$

$$y - 2 = 2(x + 1)$$

$$y - 2 = 2x + 2$$

$$y = 2x + 4$$

.....

b) $y - y_1 = k_1(x - x_1)$

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$$

$$y - 2 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

.....

6. PRESJEK DVAJU PRAVACA.

Zadana su dva pravca $p_1 \dots y = k_1x + l_1, p_2 \dots y = k_2x + l_2$.

Presjek pravaca možemo odrediti **analitički (računski)** metodom suprotnih koeficijenata, metodom supstitucije ili metodom komparacije te **grafičkom metodom**.

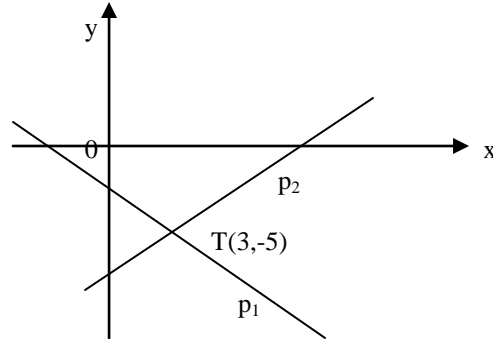
☉ **Primjer 1.** Odredi presjek pravaca $x + y + 2 = 0, x - y - 8 = 0$ analitički i grafički.

$$\begin{array}{r} x + y + 2 = 0 \\ x - y - 8 = 0 \end{array} \Bigg/ + \quad \begin{array}{r} x + y + 2 = 0 \\ 3 + y + 2 = 0 \\ y = -5 \end{array}$$

$$\frac{2x - 6 = 0}{2x = 6 \quad /: 2}$$

$$x = 3$$

$T(3, -5)$ presjek pravaca



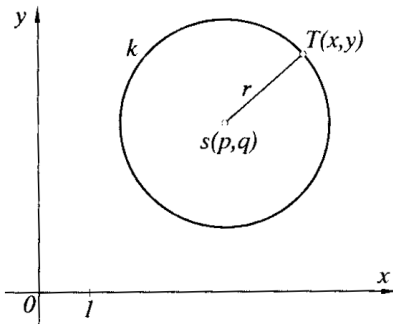
$$p_1 \dots y = -x - 2, p_2 \dots y = x - 8$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredi udaljenost točkaka $A(-1,2)$ i $B(3,-2)$.
2. Odredi polovišta (P,Q,R) stranica trokuta ΔABC ako su $A(1,2), B(-1,2)$ i $C(-5,4)$.
3. Odredi površinu trokuta iz zadatka 2.
4. Odredi težište trokuta iz zadatka 2.
5. Odredi duljine težišnice iz vrha B trokuta iz zadatka 2.
6. Odredi jednadžbu težišnice iz vrha C trokuta iz zadatka 2.
7. Odredi jednadžbu stranice c trokuta iz zadatka 2.
8. Odredi jednadžbu visine iz vrha A trokuta iz zadatka 2.
9. Odredi jednadžbu pravaca koji prolaze točkom $A(-5,4)$ koji je:
 - a. okomit napravac $2x - 3y + 6 = 0$
 - b. paralelan pravcu $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$.
10. Odredi presjek pravaca $2x + y - 5 = 0$ i $3x - y + 6 = 0$ analitički i grafički.

7. KRUŽNICA.

DEFINICIJA: Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su od čvrste točke ili **središta** jednako udaljene. Udaljenost središta i bilo koje točke na kružnici označava se s $d(S, T) = r$ (43) i naziva se **polumjer kružnice**.



$$k(S, r) = \{T(x, y) : d(S, T) = r\} \quad (44).$$

Jednadžba kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ (45) gdje je $S(p, q)$ **središte**, a r **polumjer kružnice**. Ukoliko je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava, jednadžba glasi $x^2 + y^2 = r^2$ (46).

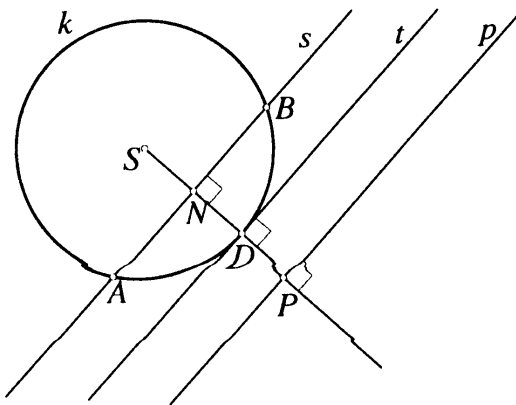
☉ **Primjer 1.** Napiši jednadžbu kružnice ako je središte u točki $S(2, -3)$, a polumjer je 5.

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \Rightarrow k(2, -3; 5)$$

☉ **Primjer 2.** Odredi središte i polumjer kružnice ako je zadana sa $k(-1, 2; 4)$.

$$k(-1, 2; 4) \Rightarrow (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16 \Rightarrow S(-1, 2), r = 4$$

7.1.ODNOS PRAVCA I KRUŽNICE.



ODNOS PRAVCA I KRUŽNICE

- s... pravac **sječe** kružnicu k $s \cap k = \{A, B\}$
- t... pravac **dotičuje** kružnicu k $s \cap k = \{D\}$
- p... pravac **ne sječe** kružnicu k $s \cap k = \{ \}$

➤ Pravac i kružnica mogu biti u sljedeća tri odnosa:

- pravac **siječe** kružnicu u dvije točke $s \cap k = \{A, B\}$ i naziva se **SEKANTA (s)**
- pravac **dotičuje** kružnicu u jednoj točki $s \cap k = \{D\}$ i naziva se **TANGENTA (t)**
- pravac **ne siječe** kružnicu $s \cap k = \emptyset$ (**p**)

NASTAVNO PISMO 1 - MATEMATIKA 3 – TEHNIČAR ZA ELEKTROTEHNIKU

☉ **Primjer 1.** U kojem su odnosu kružnica $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 9$ i pravac $x - y - 2 = 0$?

$$\begin{aligned} (x-5)^2 + (y+4)^2 &= 9 \\ x - y - 2 = 0 &\Rightarrow x = y + 2 \end{aligned}$$

← izrazimo nepoznanicu x i uvrstimo je u jednadžbu kružnice

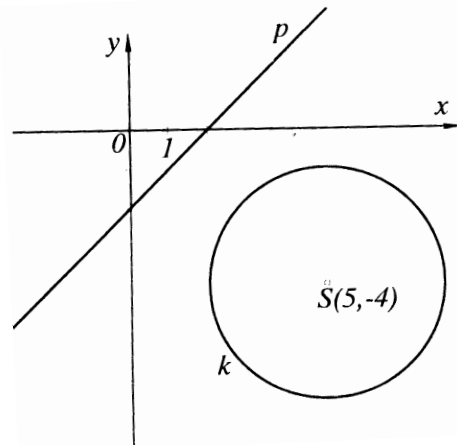
$$\begin{aligned} (y+2-5)^2 + (y+4)^2 &= 9 \\ (y-3)^2 + (y+4)^2 &= 9 \\ y^2 - 6y + 9 + y^2 + 8y + 16 - 9 &= 0 \\ 2y^2 + 2y + 16 &= 0 \quad /: 2 \\ y^2 + y + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Ispitajmo ima li kvadratna jednadžba rješenja promatrajući **diskriminantu**

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 32 = -31$$

$$D < 0$$

↙



Kvadratna jednadžba nema realnih rješenja jer je diskriminanta manja od nule.

Zaključujemo da se pravac i kružnica ne sijeku.

☉ **Primjer 2.** U kojem su odnosu kružnica $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0$ i pravac $x + 5y = 17$?

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0 &\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = 21 \\ (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 &= -21 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 26 \dots k(1, -2; \sqrt{26}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 26 \\ x + 5y = 17 &\Rightarrow x = 17 - 5y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-5y + 17 - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 26 \\ (16 - 5y)^2 + (y + 2)^2 &= 26 \\ 256 - 160y + 25y^2 + y^2 + 4y + 4 - 26 &= 0 \\ 26y^2 - 156y + 234 &= 0 \quad /: 2 \\ 13y^2 - 78y + 117 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = b^2 - 4ac = 6084 - 6084 = 0$$

$$D = 0$$

↙

$$13y^2 - 78y + 117 = 0$$

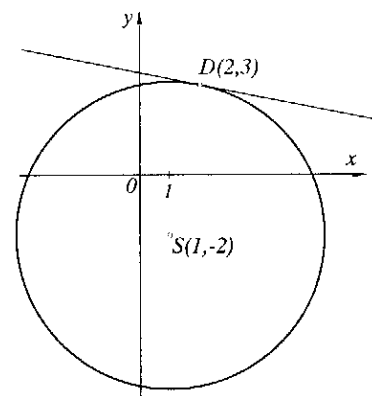
$$y_{1,2} = \frac{78 \pm 0}{26} = 3$$

$$x = 17 - 5y = 17 - 15 = 2$$

$$D(2,3)$$



Određujemo točku dodira pravca i kružnice $D(2,3)$



Kvadratna jednadžba ima jedno dvostruko relano rješenje jer je diskriminanta jednaka nula.

Zaključujemo da se pravac i kružnica dodiruju.

NAPOMENA: Ako je diskriminanta dobivene kvadratne jednadžbe (kao u primjerima 1 i 2) veća od nule, tada pravac i kružnica imaju dvije točke presjeka. Kažemo da se pravac i kružnica sijeku. Zaključimo, diskriminanta određuje odnos pravca i kružnice i to:

- ako je $D < 0$, pravac i kružnica se **ne sijeku** (47)
- ako je $D = 0$, pravac i kružnica se **dodiruju** (48)
- ako je $D > 0$, pravac i kružnica se **sijeku** (49)

☉ **Primjer 3.** Odredi jednadžbu kružnice koja prolazi točkom $T(4,3)$ sa središtem u točki $S(2,1)$.

$$r = d(S, T) = \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow k(2,1; \sqrt{8})$$

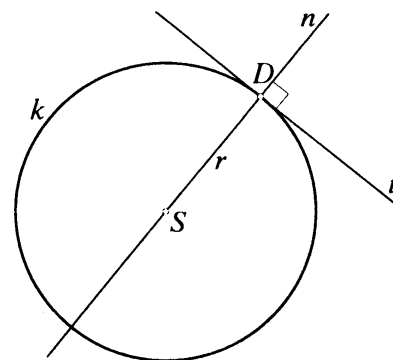
7.2. TANGENTA I NORMALA KRUŽNICE

Normala kružnice n uvijek prolazi središtem kružnice i točkom D na kružnici. Točkom D prolazi tangenta t koja je okomita na normalu. $t \perp n$

➤ **Tangenta** kružnice u točki kružnice $D(x_1, y_1)$

$$(50) \quad (x-p)(x_1-p) + (y-q)(y_1-q) = r^2 \quad \leftarrow \text{središte kružnice } S(p,q)$$

$$(51) \quad xx_1 + yy_1 = r^2 \quad \leftarrow \text{središte kružnice } S(0,0)$$



Ako sa točka $T(x, y)$ nalazi **izvan kružnice**, tada je moguće povući

dvije tangente iz te točke na kružnicu. (**UVJET TANGENCIJALNOSTI**)

➤ Uvjet da je pravac $y = kx + 1$ koji prolazi točkom $T(x, y)$ tangenta kružnice glasi

$$r^2(1+k^2) = (q-kp-1)^2 \quad (52) \quad \text{ili} \quad r^2(1+k^2) = 1^2. \quad (53)$$

NAPOMENA: Prije primjene formula za određivanje jednadžbi tangenata (50) do (53), potrebno je provjeriti nalazi se točka na kružnici ili ne.

NASTAVNO PISMO 1 - MATEMATIKA 3 – TEHNIČAR ZA ELEKTROTEHNIKU

© **Primjer 1.** Odredi jednadžbu tangente u točki $D(3, y < 0)$ kružnice $x^2 + y^2 = 25$.

Točka se nalazi na kružnici sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava $S(0,0)$, pa ćemo koristiti formulu (51) za određivanje jednadžbe tangente u točki D .

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 3^2 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - 9 \Rightarrow y^2 = 16 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$y_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow y = -4$$

$$D(3, -4)$$

zbog uvjeta iz točke $D(3, y < 0)$,
 $y = -4$ pa je točka $D(3, -4)$

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \quad (51)$$

$$3x - 4y = 25$$

$$-4y = -3x + 25 \quad /: (-4)$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

uvrštavamo u jednadžbu tangente (51) i dobijemo jednadžbu tangente iz točke D na kružnici

© **Primjer 2.** Odredi jednadžbu tangente u točki $D(5, y > 0)$ kružnice $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Točka se nalazi na kružnici sa središtem u točki $S(2,1)$, pa ćemo koristiti formulu (50) za određivanje jednadžbe tangente u točki D .

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \Rightarrow (5 - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

$$9 + (y - 1)^2 = 25 \Rightarrow (y - 1)^2 = 16 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$y - 1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4 + 1 = 5 \\ y_2 = -4 + 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 5$$

$$D(5, 5) \quad \text{zbog uvjeta iz točke } D(5, y > 0), \\ y = 5, \text{ pa je točka } D(5, 5)$$

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2$$

$$(5 - 2)(x - 2) + (5 - 1)(y - 1) = 25$$

$$3(x - 2) + 4(y - 1) = 25$$

$$3x - 6 + 4y - 4 = 25$$

$$4y = -3x + 35 \quad /: 4$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{35}{4}$$

uvrštavamo u jednadžbu tangente (50) i dobijemo jednadžbu tangente iz točke D na kružnici

© **Primjer 3.** Odredi jednadžbu tangente kružnice $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 5$ paralelne s $y = -2x$.

U ovom primjeru moramo koristiti uvjet tangencijalnosti (52).

$$r^2(1 + k^2) = (q - kp - 1)^2$$

$$5(1 + 4) = (7 - (-2)(-2) - 1)^2$$

$$25 = (7 - 4 - 1)^2$$

$$25 = (3 - 1)^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$3 - 1 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 3 - 5 = -2 \\ l_1 = 3 + 5 = 8 \end{cases}$$

$$t_{1\dots}y = kx + 1 \Rightarrow y = -2x - 2$$

$$t_{1\dots}y = kx + 1 \Rightarrow y = -2x + 8$$

pravac i tangenta su paralelni pa je koeficijent tangente jednak koeficijentu pravca $k_2 = k_1 = -2$

Dvije paralelne tangentesu rješenje primjera 3.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredi jednadžbu kružnice sa središtem u točki S(2,-3) koja prolazi točkom T(4,1).
2. Odredi jednadžbu tangente kružnice $k(-2,7;\sqrt{5})$ koja je okomita na pravac $y + 3x - 5 = 0$.
3. Odredi jednadžbu tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = 20$ u točki D(2,y>0).
4. Odredi tangente na kružnicu $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ iz točke T(3,4).
5. U kojem su odnosu pravac $7x - 17y + 169 = 0$ i kružnica $x^2 + y^2 = 169$?
6. U kojem su odnosu pravac $2x + y = 9$ i kružnica $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$?

- **UPUTA** (zadatak 3): Ukoliko **tangenta** kružnice $y = kx + 1$ **prolazi točkom** T(3,4), tada možemo pisati $y = kx + 1 \Rightarrow 4 = 3k + 1$ te izrazimo **odsječak** $l = 4 - 3k$ i uvrstimo u uvijet tangencijalnosti (52) ili (53)