



GIMNAZIJA I STRUKOVNA ŠKOLA JURJA DOBRILE PAZIN

NASTAVNI PREDMET: MATEMATIKA 3

Eksponencijalna i logaritamska funkcija.

GORTAN ROBERT

Tablica sadržaja

2.1.	eksponencijalna i logaritamska funkcija.	3
2.2.	eksponencijalne jednađbe.	3
2.3.	logaritamske jednađbe.....	6

2.1. EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA.

- **Eksponencijalna funkcija** je funkcija oblika $f(x) = a^x$ (17) gdje je **a** baza, a **x** eksponent. Realni broj **a** je veći od nule i različit od jedan ($a \in \mathfrak{R}, a > 0, a \neq 1$).
 - Eksponencijalna funkcija uvijek poprima pozitivne vrijednosti ($f(x) > 0, \forall x \in \mathfrak{R}$).
 - ako je **a > 1**, eksponencijalna funkcija **strogo raste**
 - ako je **0 < a < 1**, eksponencijalna funkcija **strogo pada**
- **Logaritamska funkcija** je funkcija oblika $f(x) = \log_a x$ (18) gdje je **a** baza, a **x** numerus. Realni broj **a** je veći od nule i različit od jedan ($a \in \mathfrak{R}, a > 0, a \neq 1$), a **x** je pozitivan realni broj ($x \in \mathfrak{R}, x > 0$)
 - Logaritamska funkcija je definirana samo za pozitivne vrijednosti numerusa, a može poprimiti i pozitivnu i negativnu vrijednost ($f(x) \in \mathfrak{R}, \forall x > 0$).
 - ako je **a > 1**, logaritamska funkcija **strogo raste**
 - ako je **0 < a < 1**, logaritamska funkcija **strogo pada**

2.2. EKSPONENCIJALNE JEDNADŽBE.

Eksponencijalne jednadžbe su jednadžbe u kojima se nepoznanica nalazi u eksponentu.

Rješavamo ih svodenjem na tri karakteristična oblika:

- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$ (19)
- $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0$ (20)
- $a^{f(x)} = b \Rightarrow f(x) = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ (21)

gdje su **a** i **b** pozitivni realni brojevi različiti od 1, a **f(x)** i **g(x)** polinomi određenog stupnja

Kod rješavanja eksponencijalnih jednadžbi služimo se **pravilima računanja s potencijama**. (22)

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$a^x : a^y = a^{x-y}$	$a^0 = 1$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$a^1 = a$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}$

NASTAVNO PISMO 2 - MATEMATIKA 3 – TEHNIČAR ZA ELEKTROTEHNIKU

☉ **Primjer 1.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $3^x = 27$.

$$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \quad \text{potencije s jednakim bazama su jednake ako su jednaki i eksponenti}$$

$$x = 2 \quad \text{rješenje jednadžbe je } x = 2.$$

☉ **Primjer 2.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $4^{3x+1} = 8^{x-4}$.

⇒ Ove su baze potencije broja 2, pa tu jednadžbu svodimo na bazu 2:

$$\begin{aligned} (2^2)^{3x+1} &= (2^3)^{x-4} && \text{izjednačimo eksponente} && \rightarrow && 2(3x+1) = 3(x-4) && \rightarrow && 3x = -14 \quad /:3 \\ 2^{2(3x+1)} &= 2^{3(x-4)} && && && 6x - 3x = -12 - 2 && && x = -\frac{14}{3} \end{aligned}$$

☉ **Primjer 3.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $0.04 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{125}\right)^{2-x} = 25^{1-x}$.

$$\begin{aligned} \frac{4}{100} \cdot \left(\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^3}\right)^{2-x} &= 5^{2-2x} && && && -7 + \frac{5}{2}x = 2 - 2x \\ 5^{-2} \cdot 5^{-5+\frac{5x}{2}} &= 5^{2-2x} && && && \frac{5}{2}x + 2x = 2 + 7 \\ \frac{1}{25} \cdot \left(5^{\frac{1}{2}-3}\right)^{2-x} &= 5^{2-2x} && \rightarrow && 5^{-2-5+\frac{5x}{2}} = 5^{2-2x} && \rightarrow && \frac{9}{2}x = 9 \quad /:2 \\ 5^{-7+\frac{5x}{2}} &= 5^{2-2x} && && && 9x = 18 \quad /:9 \\ 5^{-2} \cdot \left(5^{\frac{-5}{2}}\right)^{2-x} &= 5^{2-2x} && && && x = 2 \end{aligned}$$

☉ **Primjer 4.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8$.

$$\begin{aligned} 9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} &= 8 && && 3^{2x-4} \cdot 2^{2x-4} &= 1 \\ (3^2)^{x-2} \cdot 2^{2x-1} &= 2^3 && && (3 \cdot 2)^{2x-4} &= 1 \\ 3^{2x-4} \cdot 2^{2x-1} &= 2^3 \quad /:2^3 && \rightarrow && 6^{2x-4} &= 6^0 \\ 3^{2x-4} \cdot \frac{2^{2x-1}}{2^3} &= 1 && && 2x - 4 &= 0 \\ &&& && 2x &= 4 \quad /:2 \\ &&& && x &= 2 \end{aligned}$$

napomena: zadatak smo mogli riješiti i na ovaj način

$$\begin{aligned} 9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} &= 8 && && 3^{2x-4} \cdot 2^{2x-4} &= 1 \quad /:2^{2x-4} \\ (3^2)^{x-2} \cdot 2^{2x-1} &= 2^3 && && 3^{2x-4} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \\ 3^{2x-4} \cdot 2^{2x-1} &= 2^3 \quad /:2^3 && \rightarrow && && \\ 3^{2x-4} \cdot \frac{2^{2x-1}}{2^3} &= 1 && && 2x - 4 &= 0 \\ &&& && 2x &= 4 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Potencije različitih baza, ali jednakih eksponenata jednake su ako im je eksponent jednak 0.

$$a^{f(x)} = b^{f(x)} \rightarrow f(x) = 0$$

NASTAVNO PISMO 2 - MATEMATIKA 3 – TEHNIČAR ZA ELEKTROTEHNIKU

© **Primjer 5.** Riješi eksponencijalnu jednačbu $9^{x-1} + 3^{x-2} = 738$.

⇒ Najprije sredimo jednačbu i prebacimo broj 738 na lijevu stranu pa tako dobijemo:

$$3^{2(x-1)} + 3^{x-2} - 738 = 0$$

$$3^{2x-2} + 3^{-2} \cdot 3^x - 738 = 0$$

$$3^{-2} \cdot (3^x)^2 + 3^{-2} \cdot 3^x - 738 = 0$$

$$\frac{1}{9} \cdot t^2 + \frac{1}{9} \cdot t - 798 = 0 \quad / \cdot 9$$

$$t^2 + t - 6642 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6642}}{2} = \frac{-1 \pm 163}{2}$$

$$t_1 = -82$$

$$t_2 = 81$$

Uvodimo novu nepoznanicu
umjesto 3^x , dakle $3^x = t$

Rješavamo kvadratnu jednačbu.

Sada se vraćamo na početnu zamjenu:

$$3^x = t_1 \Rightarrow \text{ovom slučaju nema rješenja}$$

$$3^x = -82$$

$$3^x = t_2 \Rightarrow 3^x = 3^4$$

$$3^x = 81 \quad x = 4$$



© **Primjer 6.** Riješi eksponencijalnu jednačbu $9^{x-3} - 3^{x-2} + 2 = 0$

$$(3^2)^{x-3} - 3^{x-2} + 2 = 0$$

$$(3^{x-3})^2 - 3^{x-2} + 2 = 0$$

$$(3^x \cdot 3^{-3})^2 - 3^x \cdot 3^{-2} + 2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$(3^x)^2 \cdot (3^{-3})^2 - 3^x \cdot 3^{-2} + 2 = 0$$

$$3^x = t$$

$$\frac{1}{729} t^2 - \frac{1}{9} t + 2 = 0 \quad / \cdot 729$$

$$t^2 - 81t + 1458 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{81 \pm \sqrt{6561 - 5832}}{2} = \frac{81 \pm 27}{2} \quad \rightarrow$$

$$t_1 = \frac{81 + 27}{2} = 54$$

$$t_2 = \frac{81 - 27}{2} = 27$$

$$3^x = 54$$

$$x_1 = \frac{\log 3}{\log 54}$$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x_2 = 3$$

© **Primjer 7.** Riješi eksponencijalnu jednačbu $5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = 155$

$$5^{x-1} + 5^{x-1+1} + 5^{x-1+2} = 155$$

$$5^{x-1} = 5$$

$$5^{x-1} + 5^{x-1} \cdot 5^1 + 5^{x-1} \cdot 5^2 = 155$$

$$5^{x-1} \cdot (1 + 5 + 5^2) = 155$$

$$\rightarrow x - 1 = 1$$

$$5^{x-1} \cdot (1 + 5 + 25) = 155$$

$$x = 1 + 1$$

$$5^{x-1} \cdot 31 = 155 \quad /: 31$$

$$x = 2$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

- Riješi eksponencijalne jednačbe: a) $4^{\frac{1}{2}x+2} = 8^{\frac{1}{2}x+2}$ b) $(0,75)^{2x} = \frac{16}{9}$
- Riješi eksponencijalne jednačbe: a) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ b) $9^x - 4 \cdot 3^{x+3} = 0$
- Riješi eksponencijalne jednačbe: a) $2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-3} = 15$ b) $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$
- Riješi eksponencijalne jednačbe: a*) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$ b) $25^{x+2} + 5 = 6 \cdot 5^{x+2}$

2.3. LOGARITAMSKE JEDNAČBE.

Logaritamske jednačbe su jednačbe u kojima se nepoznanica nalazi u numerusu.

Rješavamo ih svođenjem na oblik $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$ (23) te korištenjem

$y = \log_a x \Rightarrow a^y = x$ (24) → **eksponencijalne jednačbe**


gdje je **a** pozitivan realan broj različit od 1, a **x** pozitivan realni broj.

➤ Ako je baza $a = 10$, tada je logaritam DEKADSKI i pišemo $\log_{10} x = \log x$ (25)



Kod rješavanja logaritamskih jednačbi služimo se **pravilima računanja s logaritmima**. (26)

$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$	$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_{a^y} x = \frac{1}{y} \cdot \log_a x$	$\log_a a = 1$
$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x$	$\log_x y = \frac{\log x}{\log y}$	$\log_a 1 = 0$

☉ **Primjer 1.** Izračunaj $\log_x 8 = -3$

$\log_x 8 = -3$ 	$y = \log_a x \Rightarrow a^y = x$	$x = \sqrt[3]{2^3}$ $x = 2^{\frac{3}{-3}}$	$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}$
$x^{-3} = 8$ $x = \sqrt[3]{8}$	$x^n = y \Rightarrow x = \sqrt[n]{y}$	$x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$	

☉ **Primjer 2.** Izračunaj $\log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$

$\log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$ $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$		$x = \sqrt[2]{\frac{1}{8}}$ $x = \sqrt[2]{2^{-3}}$		$x = 2^{\frac{-3}{-2}}$ $x = 2^2 = 4$
---	---	---	---	--

☉ **Primjer 3.** Logaritmiraj $x = \frac{10}{a\sqrt{b}}$

$$x = \frac{10}{a\sqrt{b}} \quad / \log$$

$$\log x = \log \frac{10}{a\sqrt{b}}$$

$$\log x = \log 10 - \log(a \cdot \sqrt{b}) = 1 - (\log a + \log \sqrt{b})$$



$$\log x = 1 - \log a - \log \sqrt{b}$$

$$\log x = 1 - \log a - \log b^{\frac{1}{2}}$$

$$\log x = 1 - \log a - \frac{1}{2} \log b$$

☉ **Primjer 4.** Odredi x ako je $\log x = 2 \log a - \frac{1}{2} \log b$

$$\log x = 2 \log a - \frac{1}{2} \log b$$

$$\log x = \log a^2 - \log b^{\frac{1}{2}}$$

$$\log x = \log a^2 - \log \sqrt{b}$$



$$\log x = \log \frac{a^2}{\sqrt{b}} \quad / \text{antilog}$$

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{b}}$$

NAPOMENA: Postoji još jedna važna i često korištena logaritamska formula $x = a^{\log_a x}$ (27)

☉ **Primjer 5.** Primjenom formule (27) riješi:

$$\triangleright 3^{2 \log_9 12} = (3^2)^{\log_9 12} = 9^{\log_9 12} = 12$$

$$\triangleright 4^{-\log_2 3} = (2^2)^{-\log_2 3} = 2^{-2 \log_2 3} = 2^{\log_2 3^{-2}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\triangleright 81^{\frac{1}{2} \log_3 7} = (3^4)^{\frac{1}{2} \log_3 7} = 3^{2 \log_3 7} = 3^{\log_3 7^2} = 7^2 = 49$$

☉ **Primjer 6.** Pojednostavni izraz $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\sqrt{5}} 25) - \log_8(\log_5 \sqrt{5}) =$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\sqrt{5}} 25) - \log_8(\log_5 \sqrt{5}) =$$

$$= \log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}} 5^2) - \log_{2^3}(\log_5 5^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \log_{2^{-1}}\left(\frac{2}{1} \log_5 5\right) - \log_{2^3}\left(\frac{1}{2} \log_5 5\right) =$$



$$= -\log_2 4 - \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{3} \log_2 2^{-1} =$$

$$= 2 - \frac{1}{3}(-1) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

NASTAVNO PISMO 2 - MATEMATIKA 3 – TEHNIČAR ZA ELEKTROTEHNIKU

☉ **Primjer 7.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log_3(x-5)=2$

$$\begin{array}{ll} \log_3(x-5)=2 & x-5=9 \\ 3^2=x-5 & x=14 \end{array} \quad \underline{\text{Provjera}}: x-5>0 \Rightarrow 14-5>0 \Rightarrow 9>0 \quad \mathbf{Rj: x=14}$$

NAPOMENA: Provjera je obavezna \rightarrow logaritam je definiran za **pozitivan numerus** $\log_a x$.
 $x > 0$

☉ **Primjer 8.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log(x+3)=1-\log 2$

$$\begin{array}{ll} \log(x+3)=1-\log 2 & \log(x+3)=\log 5 \quad / \text{anti log.} \\ \log(x+3)=\log 10-\log 2 & x+3=5 \\ \log(x+3)=\log \frac{10}{2} & x=5-3 \Rightarrow x=2 \end{array}$$

Provjera: $x+3>0 \Rightarrow 2+3>0 \Rightarrow 5>0$ **Rj: x=2**

☉ **Primjer 9.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log_2 \log_4(x-3)=0$.

$$\begin{array}{ll} \log_2 \log_4(x-3)=0 & x-3=4^1 \\ \log_4(x-3)=2^0 & x=3+4 \\ \log_4(x-3)=1 & x=7 \end{array}$$

Provjera:

$$\begin{array}{l} x-3>0 \Rightarrow 7-3>0 \Rightarrow 4>0 \\ \log_4(x-3)>0 \Rightarrow \log_4(7-3)>0 \Rightarrow \log_4 4>0 \Rightarrow 1>0 \end{array} \quad \mathbf{Rj: x=7}$$

☉ **Primjer 10.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log(x-1)+\log(x-2)=\log 6+\log(x-3)$.

$$\begin{array}{ll} \log(x-1)+\log(x-2)=\log 6+\log(x-3) & x^2-9x+20=0 \\ \log(x-1)\cdot(x-2)=\log 6\cdot(x-3) \quad / \text{anti log.} & x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm 1}{2} \\ (x-1)\cdot(x-2)=6\cdot(x-3) & x_1=4, x_2=5 \\ x^2-x-2x+2=6x-18 & \end{array}$$

Provjera: $x_1=4$

$x_2=5$

$$\begin{array}{ll} x-1>0 \Rightarrow 4-1>0 \Rightarrow 3>0 & x-1>0 \Rightarrow 5-1>0 \Rightarrow 4>0 \\ x+2>0 \Rightarrow 4+2>0 \Rightarrow 6>0 & x+2>0 \Rightarrow 5+2>0 \Rightarrow 7>0 \\ x-3>0 \Rightarrow 4-3>0 \Rightarrow 1>0 & x-3>0 \Rightarrow 5-3>0 \Rightarrow 2>0 \end{array}$$

Rj: $x_1=4, x_2=5$

© **Primjer 11.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log_3(x^2 - 2x) = 1$.

$$\log_3(x^2 - 2x) = 1$$

$$\log_3(x^2 - 2x) = \log_3 3 \quad / \text{anti log.}$$

$$x^2 - 2x = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3, x_2 = -1$$

Provjera: $x_1 = 3 \quad x^2 - 2x > 0 \Rightarrow 9 - 6 > 0 \Rightarrow 3 > 0$

$x_2 = -1 \quad x^2 - 2x > 0 \Rightarrow 1 + 2 > 0 \Rightarrow 3 > 0$

Rj: $x_1 = 3, x_2 = -1$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunaj: a) $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{4}{3}$

b) $\log_{\frac{3}{4}} x = -2$

2. Logaritmiraj $x = 10 \frac{10 \cdot \sqrt{a}}{b^2}$

3. Odredi x ako je: a) $\log x = \frac{1}{2} \log a - \log b - 2 \log c$

b) $\log x = -1 - 2 \log a$

4. Primjenom formule (27) riješi: a) $3^{\log_{\sqrt{3}} 7 - 2 \log_{\frac{1}{3}} 7} =$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2 - \log_9 25} =$

5. Pojednostavni izraz $\log_8 \log_4 \sqrt{2} + \log_8 \log_{\sqrt{2}} 4 =$

6. Riješi logaritamsku jednadžbu: $\log(x-1) + \log(x-2) = 2 \log(x-3)$.

7. Riješi logaritamsku jednadžbu: $\log(x-3) + \log x = 1$.

8. Riješi logaritamsku jednadžbu: $\log(3x-5) - \frac{1}{2} \log(x+1) = \log 25 + \log \frac{1}{5}$.

9. Riješi logaritamsku jednadžbu $\log_2(x^2 - 3x) = 2$.