GIMNAZIJA I STRUKOVNA ŠKOLA JURJA DOBRILE PAZIN

NASTAVNI PREDMET: MATEMATIKA 3

Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe.

GORTAN ROBERT

Nastavno pismo 1

Sadržaj

1. KVADRATNE JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE.

Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe obrađuju se u drugom razredu srednjeg obrazovanja. U narednim stranicama ponovit ćemo osnovne elemente koji su nam neophodni za razumijevanje i praćenje gradiva Matematike 3 i Matematike 4.

Definicija: <u>KVADRATNA JEDNADŽBA</u> je jednadžba oblika $ax^2+bx+c=0$ **gdje su** $a,b,c\in\Re$ **takvi da je** $a\neq 0$. **Realni broj a naziva se <u>vodeći koeficijent</u> ili koeficijent uz kvadratni član (x^2), broj b je <u>linearni koeficijent</u> ili koeficijent uz linearni član (x) i c je <u>slobodni koeficijent.</u>**

<u>VAŽNO:</u> Kvadratna jednadžba ima uvjek dva rješenja.

1.1.OBLICI KVADRATNE JEDNADŽBE.

1.1.1. JEDNADŽBA OBLIKA $ax^2+c=0$.

Ako je $b=0, c\neq 0$ **tada kvadratna jednadžba dobiva oblik** $ax^2+c=0$.

Rješavamo kako slijedi:
$$\begin{aligned} ax^2+c&=0\\ ax^2&=-c \quad /:c\end{aligned}$$
te dobijemo
$$\begin{aligned} x^2&=-\frac{c}{a} \quad /\sqrt{\ }\\ x_{1,2}&=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

☺ **Primjer 1. Riješi kvadratnu jednadžbu:**

$$\begin{aligned} 16x^2-9&=0\\ 16x^2&=9 \quad /:16\\ x^2&=\frac{9}{16} \quad /\sqrt{\ }\\ x_{1,2}&=\pm\frac{3}{4}\end{aligned}$$

ili

$16x^2-9=0 \rightarrow$ koristimo formulu za razliku kvadrata

$(4x-3)(4x+3)=0 \rightarrow$ produkt je 0 ako su članovi jednaki 0

$4x-3=0 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow x_1=\frac{3}{4}$

$4x+3=0 \Rightarrow 4x=-3 \Rightarrow x_1=-\frac{3}{4}$

☺ **Primjer 2. Riješi kvadratnu jednadžbu:**

$$\begin{aligned} 25x^2+49&=0\\ 25x^2&=-49 \quad /:25\\ x^2&=-\frac{49}{25} \quad /\sqrt{\ }\\ x_{1,2}&=\pm\frac{7}{5}i\end{aligned}$$

ili

$25x^2+49=0 \rightarrow$ koristimo formulu za razliku kvadrata

$(5x+7i)(5x-7i)=0 \rightarrow$ produkt je 0 ako su članovi jednaki 0

$5x+7i=0 \Rightarrow 5x=-7i \Rightarrow x_1=-\frac{5}{7}i$

$5x-7i=0 \Rightarrow 5x=7i \Rightarrow x_2=\frac{5}{7}i$ gdje je $i^2=-1$ ili $i=\sqrt{-1}$

1.1.2. JEDNADŽBA OBLIKA $ax^2+bx=0$.

Ako je $b\neq 0, c=0$ **tada kvadratna jednadžba dobiva oblik** $ax^2+bx=0$.

Rješavamo kako slijedi: $\begin{array}{l} ax^2+bx=0 \\ x(ax+b)=0 \end{array}$ **te dobijemo** $\begin{array}{l} x_1=0 \\ ax+b=0 \\ ax=-b \quad /:a \\ x_2=-\dfrac{b}{a} \end{array}$. **(2)**

☺ **Primjer 1. Riješi kvadratne jednadžbe:**

a)
$$\begin{array}{l} 4x^2+10x=0 \\ 2x(2x+5)=0 \\ 2x=0 \quad /:2 \Rightarrow x_1=0 \\ 2x+5=0 \\ 2x=-5 \quad /:2 \\ x_2=-\dfrac{5}{2} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} 2x^2-3x=0 \\ x(2x-3)=0 \\ x_1=0 \\ 2x-3=0 \\ 2x=3 \quad /:2 \\ x_2=\dfrac{3}{2} \end{array}$$

1.1.3. JEDNADŽBA OBLIKA $ax^2+bx+c=0$.

Ako je $b\neq 0, c\neq 0$ **tada kvadratna jednadžba dobiva oblik** $ax^2+bx+c=0$.

Jednadžbu rješavamo formulom za rješenja kvadratne jednadžbe: $\boxed{x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$. **(3)**

☺ **Primjer 1. Riješi kvadratne jednadžbe:**

a)
$$x^2-8x+12=0 \Rightarrow a=1, b=-8, c=12$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}$$
$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{8\pm 4}{2}$$
$$x_1=\frac{8+4}{2}=\frac{12}{2}=6$$
$$x_2=\frac{8-4}{2}=\frac{4}{2}=2$$

b)
$$x^2-6x+10=0 \Rightarrow a=1, b=-6, c=10$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{6\pm 2i}{2}$$
$$x_1=\frac{6+2i}{2}=\frac{2(3+i)}{2}=3+i$$
$$x_2=\frac{6-2i}{2}=\frac{2(3-i)}{2}=3-i$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. **Riješi jednadžbe: a)** $3x^2-27=0$ **b)** $2x^2+32=0$
2. **Riješi jednadžbe: a)** $3x^2+9x=0$ **b)** $4x^2-32x=0$
3. **Riješi jednadžbe: a)** $2x^2-5x+3=0$ **b)** $x^2+x-12=0$

1.2. DISKRIMINANTA KVADRATNE JEDNADŽBE $ax^2+bx+c=0$.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe dana je formulom $D=b^2-4ac$ **(4) tako da rješenja kvadratne jednadžbe možemo naći i formulom** $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ **(5) . Diskriminanta nam određuje tip ili kakva su rješenja kvadratne jednadžbe.**

- **ako je D < 0 tada su rješenja <u>kompleksni brojevi</u> (pr. $x_1 = 2 - i$, $x_2 = 2 + i$)**
- **ako je D = 0 tada su rješenja <u>jednaki realni brojevi</u> (pr. $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ ili $x_{1,2} = 3$)**
- **ako je D > 0 tada su rješenja <u>različiti realni brojevi</u> (pr. $x_1 = 2$, $x_2 = -3$)**

☺ **Primjer 1. Odredi tip rješenja i riješi kvadratne jednadžbe:**

a)

$$x^2+x-12=0 \Rightarrow a=1, b=1, c=-12$$
$$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot(-12)$$
$$D=1+48=49$$
$$D>0 \Rightarrow \text{rješenja su realna i razlicita}$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm7}{2}$$
$$x_1=-4 \quad x_2=3$$

b)

$$x^2+4x+4=0 \Rightarrow a=1, b=4, c=4$$
$$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot4$$
$$D=16-16=0$$
$$D=0 \Rightarrow \text{rješenja su realna i jednaka}$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4}{2}$$
$$x_{1,2}=-2$$

c)

$$x^2-2x+2=0 \Rightarrow a=1, b=-2, c=2$$
$$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot2$$
$$D=4-8=-4$$
$$D<0 \Rightarrow \text{rješenja su kompleksna i razlicita}$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm2i}{2}$$
$$x_1=\frac{2(1+i)}{2}=1+i \quad x_2=\frac{2(1-i)}{2}=1-i$$

1.3. VIETEOVE FORMULE KVADRATNE JEDNADŽBE $ax^2+bx+c=0$.

Vieteove formule dobijemo zbrajanjem i množenjem formule za rješenja kvadratne jednadžbe.

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}=\ldots=\frac{c}{a}$$

☼ $\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}$ **(6) su formule za zbroj i umnožak rješenja kvadratne jednadžbe.**

☼ **Kako odrediti kvadratnu jednadžbu ako znamo rješenja? → Koristimo Vieteove formule.**

$$ax^2+bx+c=0 \quad /:a$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \text{ te koristimo } x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ i } x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

$$x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0$$

Formula za određivanje kvadratne jednadžbe ako su dana rješenja glasi

$$\boxed{x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0} \quad \textbf{(7)}$$

☺ **Primjer 1. Odredi zbroj i umnožak rješenja kvadratne jednadžbe** $2x^2-3x+5=0$

$$2x^2-3x+5=0 \Rightarrow a=2, b=-3, c=5$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$$

☺ **Primjer 2. Odredi kvadratnu jednadžbu ako je jedno rješenje 2 + i.**

$$x_1=2+i \Rightarrow x_2=2-i$$

$$x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0$$

koristimo formulu (7)

$$x^2-(2+i+2-i)x+(2+i)(2-i)=0$$

$$x^2-4x+4-i^2=0$$

$$x^2-4x+5=0 \text{ jer je } i^2=-1$$

☺ **Primjer 3. Odredi kvadratnu jednadžbu ako su rješenja 3 i -5.**

$$x_1=3, x_2=-5$$

$$x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0 \Rightarrow x^2+2x-15=0$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. **Odredi tip rješenja i riješi kvadratne jednadžbe:**

   a. $2x^2+5x+3=0$ **b.** $x^2-x-12=0$

2. **Odredi zbroj i umnožak rješenja kvadratne jednadžbe** $x^2-5x+10=0$
3. **Odredi kvadratnu jednadžbu ako je jedno rješenje -3 -2i.**
4. **Odredi kvadratnu jednadžbu ako su rješenja -2 i 5.**
5. **Odredi, bez rješavanja jednažbe,** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ **ako je kvadratna jednadžba** $2x^2+5x+3=0$**.**

   (uputa: koristi Vieteove formule).

1.4. JEDNADŽBE KOJE SE SVODE NA KVADRATNE.

Slijede primjeri zadataka koje možemo rješiti korištenjem naučenog o kvadratnoj jednadžbi.

1.4.1. SUSTAV KVADRATNE I LINEARNE JEDNADŽBE.

☺ **Primjer 1. Riješi sustav** $\begin{cases} x^2-2y^2+3xy+x+2=0 \\ 2x-y=5 \end{cases}$.

Izrazimo nepoznanicu y iz linearne jednadžbe i uvrstimo u kvadratnu jednadžbu.

$$
\begin{aligned}
&2x-y=5 \Rightarrow y=2x-5 \qquad \text{uvrstimo u kvadratnu jednadžbu} \\
&x^2-2y^2+3xy+x+2=0 \\
&x^2-2(2x-5)^2+3x(2x-5)+x+2=0 \qquad \text{kvadriramo} \\
&x^2-2(4x^2-20x+25)+6x^2-15x+x+2=0 \\
&x^2-8x^2+40x-50+6x^2-14x+2=0 \\
&-x^2+26x-48=0 \quad /\cdot(-1) \\
&x^2-26x+48=0 \qquad \text{pa su rješenja jednadžbe} \\
&x_1=2 \ \text{i} \ x_2=24 \qquad \text{uvrštavamo u} \quad y=2x-5 \\
&y_1=2x_1-5=4-5=-1 \quad y_2=2x_2-5=48-5=43
\end{aligned}
$$

Rješenja sustava $(2,-1)$ i $(24,43)$

☼ **Često koristimo formule** $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ **(8)** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ **(9) .**

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. **Riješi sustave jednadžbi:** **a)** $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

2. **Riješi sustave jednadžbi:** **a)** $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 3x-y=15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2-y^2=16 \end{cases}$

1.4.2. BIKVADRATNE JEDNADŽBE.

Bikvadratne jednadžbe su jednadžbe oblika $ax^4+bx^2+c=0$ **(10) koje rješavamo uvođenjem supstitucije** $t=x^2$ **i svođenjem na kvadratnu jednadžbu** $at^2+bt+c=0$ **čija su rješenja t_1 i t_2.**

Uvrštavanjem u susptituciju dobijemo $\begin{matrix} t_1=x^2 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1} \\ t_2=x^2 \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{t_2} \end{matrix}$ **(11)**

☺ **Primjer 1. Riješi jednadžbu** $x^4-5x^2+6=0$

$$x^4-5x^2+6=0 \Rightarrow t=x^2 \Rightarrow t^2-5t+6=0$$
$$t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}\Rightarrow t_1=3, t_2=2$$
$$3=x^2 \quad /\sqrt{} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$$
$$2=x^2 \quad /\sqrt{} \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. **Riješi jednadžbe:** **a)** $x^4+6x^2+9=0$ **b)** $x^4+14-9x^2=0$
2. **Riješi jednadžbe:** **a)** $x^4+3x^2+2=0$ **b)** $4x^4-5x^2-9=0$

1.4.3. SIMETRIČNE JEDNADŽBE TREĆEG STUPNJA.

Simetrične jednadžbe trećeg stupnja su oblika $ax^3+bx^2+bx+a=0$ **(12) . Rješavamo ih grupiranjem i korištenjem formule** $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$**.**

$$ax^3+bx^2+bx+a=0$$
$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0$$
$$a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=0$$
$$(x+1)(ax^2-ax+a+bx)=0$$
$$x+1=0 \Rightarrow x_1=-1$$
$$ax^2+x(b-a)+a=0 \Rightarrow x_{2,3}=\ldots$$

☺ **Primjer 1. Riješi jednadžbu** $2x^3+3x^2-3x-2=0$

$$2x^3+3x^2-3x-2=0$$
$$2x^3-2+3x^2-3x=0$$
$$2(x^3-1)+3x(x-1)=0$$
$$2(x-1)(x^2+x+1)+3x(x-1)=0$$

$$(x-1)(2x^2+2x+2+3x)=0$$
$$(x-1)(2x^2+5x+2)=0$$
$$x-1=0\Rightarrow x_1=1$$
$$2x^2+5x+2=0\Rightarrow x_2=-2,x_3=-\frac{1}{2}$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. **Riješi jednadžbe:**

   a. $6x^3-19x^2-19x+6=0$ **b.** $4x^3-14x^2+14x-4=0$

1.5. KVADRATNA FUNKCIJA.

Definicija: KVADRATNA FUNKCIJA je funkcija oblika $f(x)=ax^2+bx+c$ **(13) gdje su** $a,b,c\in\Re$ **takvi da je** $a\neq 0$. **Zapisujemo je** $f:\Re\to\Re$.

1.5.1. GRAF KVADRATNE FUNKCIJE.

☼ **Graf kvadratne funkcije je PARABOLA. Otvor parabole ovisi o kvadratnom koeficijentu a.**

- **ako je a > 0, tada je otvor parabole «prema gore» i parabola ima oblik** $\bigcup$
- **ako je a < 0, tada je otvor parabole «prema dole» i parabola ima oblik** $\bigcap$

1.5.2. NUL TOČKE I EKSTREMI KVADRATNE FUNKCIJE.

☼ **Karakteristične točke koje nam određuju parabolu su nul točke i ekstremi.**

☼ **NUL TOČKE su točke u kojima graf kvadratne funkcije** $f(x)=ax^2+bx+c$ **siječe os x.**

Dobivamo ih rješavanjem pripadne kvadratne jednadžbe. $ax^2+bx+c=0$

Diskriminanta nam određuje koliko nultočaka ima kvadratna funkcija..

- **ako je D < 0 tada kvadratna funkcija nema realnih nultočaka**
- **ako je D = 0 tada kvadratna funkcija ima jednu dvostruku nul točku**
- **ako je D > 0 tada kvadratna funkcija ima dvije nultočke**

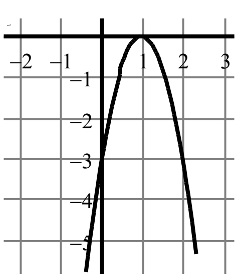
☼ **<u>EKSTREMI KVADRATNE FUNKCIJE</u> su točke u kojima kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ poprima najveću ili najmanju vrijednost. Točka ekstrema se naziva TJEME i označava se s $T(x_0,y_0)$. Koordinate tjemena računamo na nekoliko načina:**

- **Ako kvadratna funkcija ima <u>dvije nul točke</u> tada apscisu tjemena računamo po formuli $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (14) . Izračunatu koordinatu uvrštavamo u funkciju te dobijemo drugu koordinatu ili ordinatu tjemena. $y_0 = f(x_0) = ax_0^{\,2} + bx_0 + c$ (15) te je tjeme $T(x_0,y_0)$.**
- **Ako kvadratna funkcija ima <u>jednu nul točku</u> tada je ona ujedno i prva koordinata ili apscisu tjemena. Drugu koordinatu ili ordinatu tjemena izračunavamo kao u prethodnom slučaju.**
- **Ako kvadratna funkcija <u>nema realnih nultočaka</u> tada apscisu tjemena računamo po formuli $x_0 = -\frac{b}{2a}$, a ordinatu po $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$ ili $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. (16)**

<u>NAPOMENA:</u> Na ovaj način možemo računati koordinate tjemena i ako imam dvije ili jednu realnu nul točku.

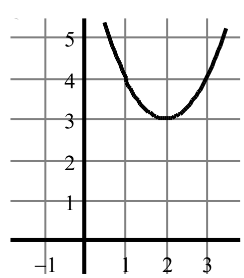
- **Ako je $a > 0$ tada je ekstrem kvadratne funkcije nazivamo i točka maksimuma ili kraće MAKSIMUM, a ako je $a < 0$ tada je ekstrem točka minimuma ili kraće MINIMUM.**

- **Kako koeficijent uz kvadratni član a i diskriminanta određuju izgled parabole?**



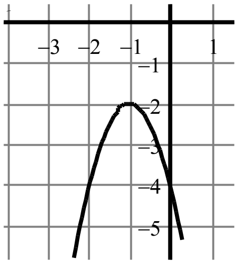
$D = 0 \rightarrow$ kvadratna funkcija ima jednu nul točku

$a < 0 \rightarrow$ parabola ima otvor prema dole $\cap$



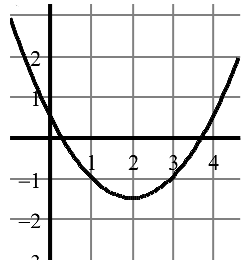
$D < 0 \rightarrow$ kvadratna funkcija nema realne nul točke

$a > 0 \rightarrow$ parabola ima otvor prema gore $\cup$



$D<0 \rightarrow$ kvadratna funkcija nema realne nul točke

$a<0 \rightarrow$ parabola ima otvor prema dole $\bigcap$



$D>0 \rightarrow$ kvadratna funkcija ima dvije različite nul točke

$a>0 \rightarrow$ parabola ima otvor prema gore $\bigcup$

☺ **Primjer 1. Odredi koordinatu tjemena kvadratne funkcije** $f(x)=x^2-6x+8$.

Odredimo nul točke kvadratne funkcije.

$$x^2-6x+8=0$$
$$D=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4$$
$$D>0 \Rightarrow \text{dvije nul tocke}$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{6\pm2}{2}\Rightarrow x_1=2, x_2=4$$
$$NT_1(2,0), NT_2(4,0)$$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2+4}{2}=3 \quad \text{apscisa tjemena}$$
$$y_0=f(x_0)=3^2-6\cdot3+8=-1 \quad \text{ordinata}$$
$$T(x_0,y_0)\Rightarrow T(3,-1) \quad \text{TJEME}$$
$$a=1>0 \quad \text{tjeme je tocka minimuma}$$

☺ **Primjer 2. Odredi koordinatu tjemena kvadratne funkcije** $f(x)=x^2-6x+10$.

Odredimo nul točke kvadratne funkcije.

$$x^2-6x+10=0$$
$$D=b^2-4ac=(-6)^2-4\cdot1\cdot10$$
$$D=36-40=-4$$
$$D<0\Rightarrow \text{nema realnih nul tocaka}$$

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2}=3 \quad \text{apscisa tjemena}$$
$$y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{D}{4a}=-\frac{-4}{4}=1 \quad \text{ordinata}$$
$$T(x_0,y_0)\Rightarrow T(3,1) \quad \text{TJEME}$$
$$a=1>0 \quad \text{tjeme je tocka minimuma}$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. **Odredi nul točke, tjeme te nacrtaj graf kvadratne funkcije** $f(x)=x^2+4x+3$.
2. **Odredi nul točke, tjeme te nacrtaj graf kvadratne funkcije** $f(x)=2x^2-3x+3$.
3. **Odredi nul točke, tjeme te nacrtaj graf kvadratne funkcije** $f(x)=-x^2-8x+9$.

1.6. KVADRATNE NEJEDNADŽBE.

Kada znak jednakosti u kvadratnoj jednadžbi $ax^2+bx+c=0$ **zamjenimo s znakovima** $\leq,\geq,<,>$ **dobijemo KVADRATNE NEJEDNADŽBE.**

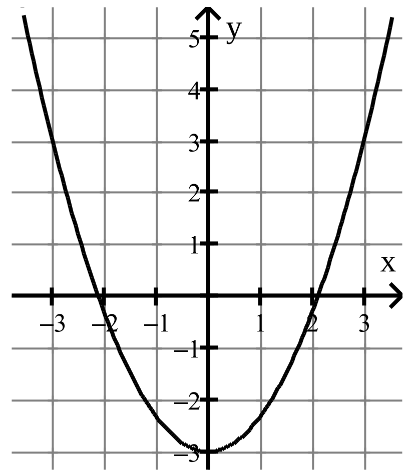
$$ax^2 + bx + c \le 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \ge 0 \qquad ax^2 + bx + c > 0.$$

Rješenja kvadranih nejednadžbi su <u>intervali relnih brojeva.</u> Otvoreni (a,b)**, zatvoreni** $[a,b]$**, poluotvoreni** $(a,b]$ **ili poluzatvoreni** $[a,b)$ **interval gdje su a i b krajnje točke ili granice intervala.**

☺ **Primjer 1. Riješi nejednadžbu** $\frac{3}{4}x^2 - 3 > 0$.

Odredit ćemo nul točke te nacrtati parabolu.

$$\frac{3}{4}x^2 - 3 = 0$$
$$\frac{3}{4}x^2 = 3 \quad /\cdot\frac{4}{3}$$
$$x^2 = 4 \quad /\sqrt{\ }$$
$$x_1 = -2, x_2 = 2$$
$$NT_1(-2,0), NT_2(2,0)$$



Tjeme možemo izračunati ako želimo precizno nacrtati graf funkcije tj. parabolu. $\rightarrow$ $T(0,-3))$

Funkcija je pozitivna $(f(x) \ge 0, f(x) > 0)$ **na intervalima gdje je parabola «iznad osi x»**

Funkcija je negativna $(f(x) \le 0, f(x) < 0)$ **na intervalima gdje je parabola «ispod osi x».**

Funkcija je pozitivna u intervalima $(-\infty,-2)$ **i** $(2,+\infty,)$**, a negativna na intervalu** $(-2,2)$**.**

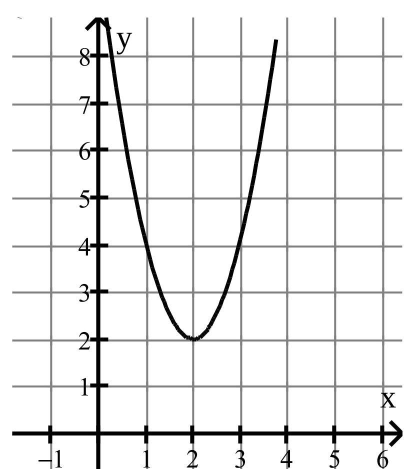
Rješenje nejednažbe $\frac{3}{4}x^2 - 3 > 0$ **je** $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

☺ **Primjer 2. Riješi nejednadžbu f(x) < 0 ako je zadana funkcija** $f(x) = 2x^2 - 8x + 10$.

Odredit ćemo nul točke te nacrtati parabolu.

$$2x^2 - 8x + 10 = 0 \quad /:2$$
$$x^2 - 4x + 5 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = -16$$
$$D < 0 \quad \text{nema realnih nul tocaka}$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$$
$$y_0 = -\frac{D}{4a} = \frac{16}{8} = 2$$
$$T(x_0, y_0) \Rightarrow T(2,2)$$



Tjeme možemo izračunati ako želimo precizno nacrtati graf funkcije tj. parabolu. $\rightarrow$ $T(2,2)$

Funkcija je pozitivna za sve realne brojeve x, pa nejednadžba f(x) < 0 nema rješenja ili $x \in \varnothing$

- **Napomena: Rješenje nejednadžbe f(x) > 0 je cijeli skup R ili** $x \in \Re$

☺ **Primjer 3. Riješi nejednadžbu** $\frac{3}{4}x^2 - 3 \leq 0$.

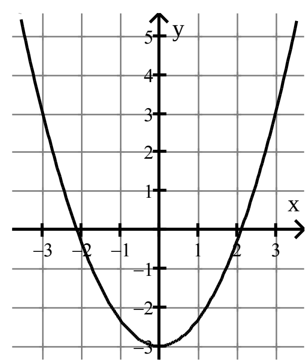
- **Nul točke** $NT_1(-2,0), NT_2(2,0)$ **i tjeme** $T(0,-3)$ **smo odredili u primjeru 1.**
- **Na crtežu vidimo da je funkcija negativna na intervalu** $[-2,2]$.

  Rješenje nejednadžbe $\frac{3}{4}x^2 - 3 \leq 0$ **je** $x \in [-2,2]$.

☺ **Primjer 4. Riješi nejednadžbu** $(x+2)(x-2) < 0$.

Odredimo nul točke i nacrtamo parabolu. Kad bi pomnožili zagrade, nejednadžba bi imala oblik $x^2 - 4 < 0$. **Koeficijent uz kvadratni član a > 0 pa je otvor parabole prema gore.**

$$(x+2)(x-2) = 0$$
$$x+2=0 \Rightarrow x_1 = -2$$
$$x-2=0 \Rightarrow x_1 = 2$$
$$NT_1(-2,0), NT_2(2,0)$$



Rješenje nejednažbe $(x+2)(x-2) < 0$ **je** $x \in (-2,2)$.

NAPOMENA: U nejednadžbama u kojima se javljaju znakovi nejednakosti $\leq, \geq$ **krajnje točke ili granice intervala su uključene u interval te je riječ o intervalima** $(-\infty, a]$., $[a,b]$ **ili** $[b,+\infty)$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. **Riješi nejednadžbu** $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.
2. **Riješi nejednadžbu** $x^2 - 3x - 4 < 0$.
3. **Riješi nejednadžbu** $-2x^2 + x + 1 > 0$.

- **NAPOMENA: Množenjem ili dijeljenjem nejednadžbe s negativnim brojem, znak nejednakosti se mijenja. Npr:**
$$\begin{aligned} -2x &< 4 \quad /:(-2) \\ x &> -2 \end{aligned}$$