4r - PRIPREMA ZA NATJECANJE IZ MATEMATIKE (3)

1. Dokaži: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots\binom{n}{n}=2^n$

   (uputa: razviti desnu stranu pomoću binomne formule $(1+1)^n$)

2. Dokaži da je $\frac{(5n)!}{40^n n!}$ prirodan broj za svaki prirodan broj n. **(O 2008.)**

3. Ako je x rješenje jednadžbe $z^2-z+1=0$ izračunaj zbroj $z^{2004}+\frac{1}{z^{2004}}$.

   (RJ: 2) **(O 2004.)**

   Odredi za koju je vrijednost od x četvrti član razvoja binoma $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$ 20 puta veći od eksponenta binoma ako je binomni koeficijent četvrtog člana pet puta veći od

   binomnog koeficijenta drugog člana.

   (RJ: 4) **(O 2007. A)**

4. Dokaži da je za svaki prirodan broj n broj $\mathrm{Re}((1+i\sqrt{3})^n)$ cijeli broj djeljiv s 2^{n-1}.
   (O 2007.)

5. Ako za svaki $x\in R$ vrijedi $f(x+1)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ pokaži da je f periodička funkcija.

   (Ž 2007.)

6. U skupu kompleksnih brojeva riješi jednadžbe:

   a. $z^3=\bar{z}$ (RJ: $z_1=0, z_2=1, z_3=i, z_4=-1, z_5=-i$)

   b. $z^5=\bar{z}$

   (RJ: $z_0=0, z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3=-1, z_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_5=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} z_6=1$)

   (Ž 2007. A)

7. Odredi sva cjelobrojna rješenja sustava: **(O 2007.)**

   $$ab+5=0$$
   $$bc+1=a$$
   $$ca+1=b$$

   (RJ: $(-2,3,-1),(3,-2,-1)$)