

3r - PRIPREMA ZA NATJECANJE IZ MATEMATIKE (5)

Prisjetimo se:

1. Ako je $\sin t + \cos t = x$ i $\sin^3 t + \cos^3 t = y$, dokaži da je $y = \frac{3x - x^3}{2}$. (O 2006.)

2. Ako kutovi α, β trokuta $\triangle ABC$ zadovoljavaju jednakost $\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$, tada je trokut $\triangle ABC$ ili pravokutan ili jednakokračan. Dokaži.

Zadaci s natjecanja:

3. U 14 sati udaljenost velike i male kazaljke sata je 13 cm, a u 9 sati 17 cm. Kolika je duljina velike kazaljke?

4. Duljine stranica paralelograma ABCD su $|AB| = 13$ i $|BC| = 14$, duljina jedne dijagonale je $|AC| = 21$. Odredi duljinu druge dijagonale. (O 2006.)

5. Zadan je paralelogram ABCD sa stranicama $|AB| = a$ i $|BC| = b$ te dijagonalama $|AC| = e$ i $|BD| = f$. Dokaži da vrijedi formula $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

6. Zadan je trokut sa stranicama $a = |BC| = 4$ i $b = |CA| = 5$. Odredi polumjer opisane i polumjer upisane kružnice ako je $\angle BCA = 2\angle CAB$.

7. U trokutu ABC nalazi se točka P takva da vrijedi $\angle PAC = 40^\circ$, $\angle PCA = 70^\circ$, $\angle PBC = 20^\circ$ i $\angle PCB = 10^\circ$. Odredi kutove trokuta ABC. (Ž 2006.)

8. Duljine dviju stranica trokuta su a i b, njima nasuprotni kutovi α i β , a visina na treću stranicu ima duljinu v. Ako za kutove vrijedi $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ili $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$, dokažite da je onda

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

(O 2007.)

