

3r - PRIPREMA ZA NATJECANJE IZ MATEMATIKE (4)

Zadaci s natjecanja:

1. Riješi jednadžbu: $\sin^8 x + \cos^8 x = 1$. (O 2008.)
2. Nađi sva rješenja jednadžbe: $\sin x - \cos x + \sin x \cos x = 1$. (O 2008.)
3. Ako je $\sin 2x = a$, odredi $\sin^6 x + \cos^6 x$. (O 2008.)
4. Riješite jednadžbu: $\log_{\sin x} \cos x - 2 \log_{\cos x} \sin x + 1 = 0$. (O 2000.)
5. Za koje trokute vrijedi jednakost $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = 0$, ako su α, β, γ kutovi trokuta? (O 2000.)
6. Ako su x, y, a, b realni brojevi za koje vrijedi $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tga}$, $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctgb}$, $x + y = \frac{\pi}{4}$, izračunaj $\operatorname{ctga} - \operatorname{ctgb}$. (Ž 2006.)
7. Nađi sva rješenja nejednadžbe $\frac{2 \sin x - 1}{\cos 2x + \sin^2 x} < 0$. (Ž 2008.)

Da se prisjetimo:

8. Ako je $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, bez upotrebe kalkulatora odredi vrijednost $\cos 2\alpha$, $\alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i zatim odredi $\cos\left(6\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.
9. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x$ i odredi njezine ekstreme.
10. Odredi nultočke te točke u kojima se dobivaju ekstremne vrijednosti funkcije $f(x) = -\sqrt{3} \sin 4x - \cos 4x + 1$ i skiciraj graf na intervalu $[0, 3\pi]$.
11. Ako je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dokaži da je: $\sin \alpha - \sin \beta + \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.

