



Nastavno pismo 3

Matematika 4

Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile Pazin
Obrazovanje odraslih 2010./2011.
Robert Gortan, prof.

Derivacije.

Tablica sadržaja

7. DERIVACIJE.....	3
7.1. PRAVILA DERIVIRANJA	3
7.2. TABLICA OSNOVNIH DERIVIRACIJA	3
7.3. DERIVACIJA SLOŽENE FUNKCIJE.....	5
7.4. DERIVACIJA INVERZNE FUNKCIJE.....	5
7.5. JEDNADŽBA TANGENTE I NORMALE U TOČKI KRIVULJE	6

7. DERIVACIJE

7.1. PRAVILA DERIVIRANJA

- DERIVACIJA KONSTANTE
- DERIVACIJA UMNOŠKA KONSTANTE I FUNKCIJE
- DERIVACIJA ZBROJA I RAZLIKE FUNKCIJA
- DERIVACIJA PRODUKTA FUNKCIJA
- DERIVACIJA KVOCJENTA FUNKCIJA

$$C' = 0$$

$$(C \cdot f)' = C \cdot f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

7.2. TABLICA OSNOVNIH DERIVIRACIJA

f	f'	f	f'	f	f'
x	1	a^x	$a^x \cdot \ln a$	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	e^x	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\cos x$	$-\sin x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sin x$	$\cos x$

Primjer 1. Deriviraj $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

$$f'(x) = (3x^2 + 4x + 1)' = \underbrace{(3x^2)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} + \underbrace{(4x)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} + \underbrace{(1)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} = 3 \cdot \underbrace{(x^2)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} + 4 \cdot \underbrace{(x)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} + 0 = \underbrace{3 \cdot 2x + 4 \cdot 1 + 0}_{\text{prema tablici derivacija}} = 6x + 4$$

Primjer 2. Deriviraj $f(x) = \sin x + \ln x - \operatorname{tg} x - \log_2 x$

$$f'(x) = (\sin x + \ln x - \operatorname{tg} x - \log_2 x)' = \underbrace{(\sin x)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} + \underbrace{(\ln x)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} - \underbrace{(\operatorname{tg} x)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} - \underbrace{(\log_2 x)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} = \cos x + \frac{1}{x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x \ln 2}$$

Primjer 3. Deriviraj $f(x) = (\sin x + 1)(\cos x - 2)$

NASTAVNO PISMO 3 - MATEMATIKA 4 – TEHNIČAR ZA ELEKTROTEHNIKU

$$f'(x) = ((\sin x + 1)(\cos x - 2))' = \underbrace{(\sin x + 1)' \cdot (\cos x - 2) + (\sin x + 1) \cdot (\cos x - 2)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}} =$$

$$= \underbrace{(\cos x + 0) \cdot (\cos x - 2) + (\sin x + 1) \cdot (-\sin x - 0)}_{\text{prema pravilima derivacija i tablici derivacija}} = \cos^2 x - 2 \cos x - \sin^2 x - \sin x$$

Primjer 4. Deriviraj $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2}{2x - 1} \right)' = \frac{\underbrace{(x^2 + 2)' \cdot (2x - 1) - (x^2 + 2) \cdot (2x - 1)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}}}{(2x - 1)^2} = \frac{(2x + 0) \cdot (2x - 1) - (x^2 + 2) \cdot (2 - 0)}{(2x - 1)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 2x - 2x^2 - 4}{(2x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 4}{(2x - 1)^2} = \frac{2(x^2 - x - 2)}{(2x - 1)^2}$$

Primjer 5. Deriviraj $f(x) = \frac{2 \sin x + 1}{3 \cos x - 1}$

$$f'(x) = \left(\frac{2 \sin x + 1}{3 \cos x - 1} \right)' = \frac{\underbrace{(2 \sin x + 1)' \cdot (3 \cos x - 1) - (2 \sin x + 1) \cdot (3 \cos x - 1)'}_{\text{prema pravilima deriviranja}}}{(3 \cos x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(2 \cos x + 0) \cdot (3 \cos x - 1) - (2 \sin x + 1) \cdot (-3 \sin x - 0)}{(3 \cos x - 1)^2} =$$

$$= \frac{6 \cos^2 x - 2 \cos x + 6 \sin^2 x + 3 \sin x}{(3 \cos x - 1)^2} =$$

$$= \frac{6 \left(\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^1 \right) + 3 \sin x - 2 \cos x}{(3 \cos x - 1)^2} = \frac{6 + 3 \sin x - 2 \cos x}{(3 \cos x - 1)^2}$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Zadane su funkcije $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ i $g(x) = 5x^2 - 4x^3 + 2x - 1$.

Odredi : a) $(f(x) + g(x))' =$ b) $(f(x) \cdot g(x))' =$ c) $(f(x) - g(x))' =$ d) $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' =$

2. Zadane su funkcije $f(x) = 3x^2 - 4 \cos x + \log_3 x - \cos x$ i $g(x) = 2 \log x - \sqrt{x} + x^7$. Odredi :

a) $(f(x) + g(x))' =$ b) $(f(x) \cdot g(x))' =$ c) $(f(x) - 2g(x))' =$ d) $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' =$

3. Zadane su funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 5$ i $g(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$.

a) Rješi jednadžbu $(f(x))' = (g(x))'$

b) Rješi nejednadžbu $(f(x))' + 1 \geq 0$

7.3. DERIVACIJA SLOŽENE FUNKCIJE

Primjer 1. Zadane su funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2 + x - 2$. Kompozicija funkcija daje novu funkciju $h(x) = (f \circ g)(x) \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + x - 2) = \sqrt{x^2 + x - 2}$.

Kako deriviramo kompoziciju funkcija?

$$h'(x) = f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{pravilo ulančanog deriviranja} \quad f(g(x))' = f'(u) \cdot g'(x), \quad u = g(x)$$

$$\left(\sqrt{x^2 + x - 2}\right)' = \left\{ \begin{array}{l} y = f(u) = \sqrt{u} \\ u(x) = x^2 + x - 2 \end{array} \right\} = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 2}}$$

Primjer 2. Deriviraj funkciju $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^2$ (kompozicija potencije i kvadratne funkcije)

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x) = x^2 + 2x - 1 \\ v(u) = u^2 \end{array} \right.$$

$$f(x)' = (x^2 + 2x - 1)^2 = v(u)' \cdot u(x)' = 2u \cdot (2x + 2) = 4(x^2 + 2x - 1)(x + 1)$$

Primjer 3. Deriviraj funkciju $f(x) = \sin^2 3x^4$ (kompozicija potencije, trigonometrijske funkcije i potencije)

$$f(x)' = (\sin^2 3x^4)' = \underbrace{2 \sin 3x^4}_{\text{POTENCIJA}} \cdot \underbrace{\cos 3x^4}_{\text{TRIG.FUNKCIJA}} \cdot \underbrace{3 \cdot 4x^3}_{\text{POTENCIJA}} = 12x^3 \cdot \underbrace{2 \sin 3x^4 \cos 3x^4}_{\text{DVOSTRUKI.KUT}} = 12x^3 \sin 6x^4$$

7.4. DERIVACIJA INVERZNE FUNKCIJE

Ako je $y = f(x)$ i njoj inverzna funkcija $x = g(y)$, tada vrijedi $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}, y = f(x)$

Primjer 1. Zadana je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$. Inverzna funkcija je $g(y) = y^2$.

$$\left(\sqrt{x}\right)' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Primjer 2. Zadana je funkcija $f(x) = \log_a x$. Inverzna funkcija je $g(y) = a^y$.

$$\left(\log_a x\right)' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

7.5. JEDNADŽBA TANGENTE I NORMALE U TOČKI KRIVULJE

☉ **Jednadžba tangente u točki (x_0, y_0) funkcije $f(x)$ ima jednadžbu** $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

☉ **Normala na graf funkcije $f(x)$ u točki (x_0, y_0) ima jednadžbu** $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Primjer 1. Odredi jednadžbe tangente i normale na graf funkcije $f(x) = x^3 - x + 2$ u točki s apscisom 1.

☐ odredimo *koordinatu točke* $f(1) = 1^3 - 1 + 2 = 2$ te je točke $T(1,2)$

☐ odredimo *derivaciju funkcije* $f'(x) = 3x^2 - 1$. Koeficijent smjera tangente je
 $k = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$

☐ **jednadžba tangente** $y - y_0 = k(x - x_0)$ je $y - 2 = 2(x - 1)$ odnosno $y = 2x$

☐ **jednadžba normale** $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$ je $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ odnosno $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Kut dviju krivulja je kut između tangenata na krivulje u njihovom sjecištu $\rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$

gdje su $k_1 = f'_1(x_0), k_2 = f'_2(x_0)$ koeficijenti smjera tangenata u točki presjeka (x_0, y_0)

Primjer 2. Odredi kut pod kojim se sijeku krivulje $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$ u točki $(1,1)$.

☐ odredimo koeficijente smjera tangenata prve i druge krivulje u zadanoj točki

○ $k_1 = f'_1(1) = (\sqrt{x})' \Big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$

○ $k_2 = f'_2(1) = (x^2)' \Big|_{x=1} = 2x \Big|_{x=1} = 2$

☐ računamo $\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} \right| = \left| \frac{\frac{3}{2}}{2} \right| = \frac{3}{4}$ i kut iznosi $\varphi = 36^\circ 52' 12''$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Deriviraj sljedeće funkcije :

a. $f(x) = (2x - 3)^{10}$

RJ: $f'(x) = 20(2x - 3)^9$

b. $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)(x + 4)$

RJ: $f'(x) = 9x^2 + 20x - 7$

c. $f(x) = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$

RJ: $f'(x) = 3x^2$

d. $f(x) = \frac{(x - 2)^2 + 8x}{4 - x^2}$

RJ: $f'(x) = \frac{4}{(x - 2)^2}$

e. $f(x) = \frac{2x^3}{1 + x^2}$

RJ: $f'(x) = \frac{2x^2(3 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$

f. $f(x) = (1 - 2x^2)^2$

RJ: $f'(x) = 8x(2x^2 - 1)$

2. Odredi derivacije sljedećih funkcija:

a. $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$

RJ: $f'(x) = -\frac{3x}{\sqrt{4 - 3x^2}}$

b. $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$

RJ: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$

c. $f(x) = \frac{2 \sin x + \sin 2x}{2 \sin x - \sin 2x}$

RJ: $f'(x) = \frac{-2 \sin x}{(1 - \cos x)^2}$

d. $f(x) = \frac{2 \cos x - 1}{3 \sin x}$

RJ: $f'(x) = \frac{\sin x - 2}{3 \sin^2 x}$

e. $f(x) = \sin^5 x (1 - \cos^2 x)$

RJ: $f'(x) = 7 \sin^6 x \cos x$

3. Odredi treću derivaciju sljedeće funkcije $f(x) = x^2 + \sin 2x$.

RJ: $f'''(x) = -8 \sin 2x$

4. Odredi jednadžbu tangente i normale na parabolu $y = -3x^2 + 2x - 1$ u točki $T(1, y)$.

RJ: $t...4x + y = 2, n...x - 4y = 9$