Nastavno pismo 2

Matematika 4

Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile Pazin
Obrazovanje odraslih 2010./2011.
Robert Gortan, prof.

Nizovi brojeva.
Funkcije.

Tablica sadržaja

5. NIZOVI REALNIH BROJEVA

5.1. ARITMETIČKI NIZ

ARITMETIČKI NIZ je niz realnih brojeva kod kojeg je razlika bilo kojeg člana i njemu susjednog uvijek jednaka. Razlika ili diferencija označava se slovom **d**.

- n - ti član niza a_n $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$ uz a_1 - prvi član niza, d - diferencija
- suma n članova niza $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$

Primjer 1. Odredi deseti član aritmetičkog niza 1,3,5,7,…

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = 2}_{\text{razlika ili diferencija}} \Rightarrow \underbrace{a_{10} = a_1 + (10-1)d}_{\text{iz relacije za n-ti član}} = 1 + 9 \cdot 2 = 19$$

Primjer 2. Odredi zbroj dvadeset članova aritmetičkog niza 2,6,10,…

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 6 \\ a_3 &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = 4}_{\text{razlika ili diferencija}} \Rightarrow \underbrace{S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + (20-1)d)}_{\text{iz relacije za sumu n članova niza}} = 10(2 \cdot 2 + 19 \cdot 4) = 800$$

5.2. GEOMETRIJSKI NIZ

GEOMETRIJSKI NIZ je niz realnih brojeva kod kojeg je kvocijent bilo kojeg člana i njemu susjednog uvijek jednak. Kvocijent označavamo slovom **q**.

- n - ti član niza a_n $\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$ uz a_1 - prvi član niza, q - kvocijent
- suma n članova niza $\boxed{S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}$

Primjer 1. Odredi peti član geometrijskog niza 1,3,9,…

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = 3}_{\text{kvocijent susjednih članova}} \Rightarrow \underbrace{a_5 = a_1 q^4}_{\text{iz relacije za n-ti član}} = 1 \cdot 3^4 = 81$$

Primjer 2. Odredi zbroj osam članova geometrijskog niza 2,4,8,…

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \\ a_3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = 2}_{\text{kvocijent susjednih članova}} \Rightarrow \underbrace{S_8 = a_1 \frac{q^8 - 1}{q - 1}}_{\text{iz relacije za sumu n članova}} = 2\frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 510$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredi 10. član niza 2,-1,-4,…
2. Zbroji deset članova niza 5,7,9,…
3. Odredi sedmi član aritmetičkog niza ako je prvi član 5, a četvrti 14.
4. Odredi šesti član niza 4,2,1,…
5. Odredi sumu 10 članova niza 1,-3,9,…
6. Drugi član geometriskog niza je 4, a treći 2. Odredi peti član niza.

6. <u>FUNKCIJE</u>

6.1. PODRUČJE DEFINICIJE ILI DOMENA FUNKCIJE

Odrediti domenu ili područje definiciju funkcije znači vidjeti za koje vrijednosti nepoznanice x funkcija ima smisla, odnosno dobro je definirana. Vidjeti ćemo 3 karakteristična primjera.

Primjer 1. Odredi domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x-1}$

Zbog postojanja kvadratnog korjena u funkciji $f(x) = \sqrt{x-1}$ slijedi $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$. Naime, kvadratni je korijen definiran samo za pozitivne brojeve. Dakle, rješenja su svi realni brojevi veći ili jednaki 1. Domenu zapisujemo $D_f ...x \in [1, +\infty)$.

Primjer 2. Odredi domenu funkcije $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Zbog postojanja razlomka u funkciji $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ slijedi $x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$. Naime, razlomak je definiran uz uvijet da je nazivnik različit od nula. Dakle, rješenja su svi realni brojevi različiti od -1. Domenu zapisujemo $D_f ...\underbrace{x \in R \setminus \{-1\}}_{\text{svi realni brojevi osim -1}}$.

Primjer 3. Odredi domenu funkcije $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+4}{x-1}}$

U ovom se primjeru objedinjuju prva dva primjera. Zbog postojanja kvadratnog korjena u $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+4}{x-1}}$ uvjet je $\dfrac{2x+4}{x-1}\geq 0$. Primjer ćemo riješiti na dva načina.

- <u>1.način</u>

Razlomak oblika $\dfrac{2x+4}{x-1}\geq 0$ biti će pozitivan ako su predznaci brojnika i nazivnika $\dfrac{+}{+}$ ili $\dfrac{-}{-}$.

Slijedi $2x+4\geq 0, x-1>0$ i $2x+4\leq 0, x-1<0$.

1.slučaj. $\left.\begin{matrix}2x+4\geq 0\\ x-1>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x\geq -2\\ x>1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in\langle 1,+\infty\rangle$

2.slučaj. $\left.\begin{matrix}2x+4\leq 0\\ x-1<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x\leq -2\\ x<1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in\langle -\infty,-2]$

Konačno rješenje je unija rješenja prvog i drugog slučaja

$$D_f \ldots x\in\langle -\infty,-2]\cup\langle 1,+\infty\rangle$$

- <u>2.način</u>

Rješavamo $\dfrac{2x+4}{x-1}\geq 0$ tako da odredimo nul točke brojnika i nazivnika. $\begin{matrix}2x+4=0\rightarrow x=-2\\ x-1=0\rightarrow x=0\end{matrix}$ te uvrštavamo u tablicu.

Konačno rješenje su intervali u kojima je produkt P pozitivan jer je uvijet bio $\dfrac{2x+4}{x-1}\geq 0$.

Uglata zagrada je SAMO kod nultočke BROJNIKA.

	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
	-3				
2x + 4	2(-3)+4 = - 2 -	0	+		+
x – 1	-		-	0	+
P	+		-		+

$$D_f \ldots x\in\langle -\infty,-2]\cup\langle 1,+\infty\rangle$$

6.2. PARNOST FUNKCIJE

Funkcija je PARNA ako vrijedi $\boxed{f(-x)=f(x)}$, a ako je $\boxed{f(-x)=-f(x)}$ funkcija je NEPARNA.

Najčešće su funkcije koje nisu ni parne ni neparne.

Primjer 1. Odredi parnost funkcije $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2 \to f(-x) = (-x)^2 = x^2 \Rightarrow \underbrace{f(-x) = f(x)}_{\text{funkcija je PARNA}}$$

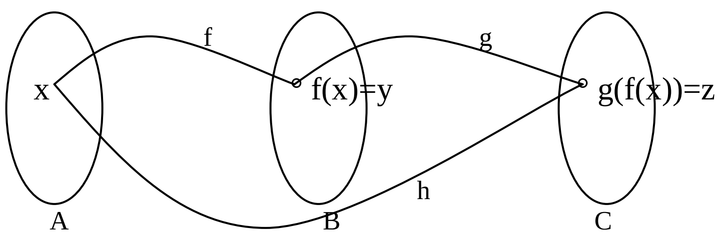
Primjer 2. Odredi parnost funkcije $f(x) = x^5 - x^7$

$$f(x) = x^5 - x^7 \to f(-x) = (-x)^5 - (-x)^7 = -x^5 + x^7 = -(x^5 - x^7) \Rightarrow \underbrace{f(-x) = -f(x)}_{\text{funkcija je NEPARNA}}$$

Primjer 3. Odredi parnost funkcije $f(x) = 2x + 1$

$$f(x) = 2x + 1 \to f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1 \Rightarrow \underbrace{f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)}_{\text{funkcija nije ni PARNA ni NEPARNA}}$$

6.3. KOMPOZICIJA ILI SLAGANJE FUNKCIJA



$$\left.\begin{matrix} f: A \to B \\ g: B \to C \\ h: A \to C \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} f(x) = y \\ g(y) = z \\ h(x) = z \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} h(x) = g(f(x)) \\ h(x) = (g \circ f)(x) \end{matrix}\right\}$$

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x)\ ,\ f(g(x)) = (f \circ g)(x$$

Primjer 1. Odredi kompoziciju funkcija $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = 3x - 1$

$$(f \circ g)(x) = f(\underbrace{g(x)}_{\text{uvrštavamo g(x)}}) = f(\underbrace{3x - 1}_{\text{uvrštavamo u f(x) umjesto x}}) = 2(3x - 1) + 1 = 6x - 2 + 1 = 6x - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\text{uvrštavamo f(x)}}) = g(\underbrace{2x + 1}_{\text{uvrštavamo u g(x) umjesto x}}) = 3(2x + 1) - 1 = 6x + 3 - 1 = 6x + 2$$

Primjer 2. Odredi kompoziciju funkcija $f(x) = x^2$ i $g(x) = x - 1$

$$(f \circ g)(x) = f(\underbrace{g(x)}_{\text{uvrštavamo g(x)}}) = f(\underbrace{x - 1}_{\text{uvrštavamo u f(x) umjesto x}}) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\text{uvrštavamo f(x)}}) = g(\underbrace{x^2}_{\text{uvrštavamo u g(x) umjesto x}}) = x^2 - 1$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredi domenu funkcija : a) $f(x)=\sqrt{2x+5}$ b) $f(x)=\sqrt{2-4x}$ c) $f(x)=\dfrac{3x+4}{2x-1}$

   d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-1}}$ f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

2. Odredi parnost funkcija : a) $f(x)=x^4+x^6$ b) $f(x)=2x^{14}-x^2$ c) $f(x)=x^3+x^5$

   d) $f(x)=-x^5-x$ e) $f(x)=x^4+x^5$ f) $f(x)=x+1$

3. Odredi kompozicije $f\circ g, g\circ f, f\circ f, g\circ g$ ako su: a) $f(x)=x^2+1$, $g(x)=2x-1$

   b) $f(x)=5x+4$, $g(x)=6x^2-1$