Nastavno pismo 1

Matematika 4

Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile Pazin
Obrazovanje odraslih 2010./2011.
Robert Gortan, prof.

Skupovi brojeva

Tablica sadržaja

1. SKUPOVI BROJEVA

1.1. BROJEVNI SUSTAVI

ZAPIS BROJ U SUSTAVU S BAZOM b

Neka je b prirodan broj veći od 1. Prirodni broj N zapisan u sustavu s bazom b je oblika

$$N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b^1 + a_0.$$

Znamenke $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ su cijeli brojevi iz skupa $\{0,1,2,\ldots,b-1\}$.

Primjer 1. Broj $152_{(8)}$ iz sustava s bazom 8 pretvori u broj u dekatskom sustavu.

$$152_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 2 = 64 + 40 + 2 = 106_{(10)} = 106$$

Primjer 2. Pretvori brojeve $3216_{(12)}, 10010011_{(2)}, 234_{(5)}$ u brojeve u dekatskom sustavu.

$$3216_{(12)} = 3 \cdot 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12^1 + 6 = \ldots = 5490$$

$$10010011_{(2)} = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 = \ldots = 147$$

$$234_{(5)} = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 = 69$$

1.1.1. VEZA BINARNOG, OKTALNOG I HEKSADEKATSKOG SUSTAVA

Jedna znamenka OKTALNOG sustava zamjenjuje **3** znamenkama BINARNOG sustava.

OKTALNI SUSTAV	BINARNI SUSTAV	OKTALNI SUSTAV	BINARNI SUSTAV
0	0	4	100
1	1	5	101
2	10	6	110
3	11	7	111

Jedna znamenka HEKSADEKATSKOG sustava zamjenjuje **4** znamenke BINARNOG sustava.

HEKSADEKATSKI SUSTAV	BINARNI SUSTAV	HEKSADEKATSKI SUSTAV	BINARNI SUSTAV
0	0	8	1000
1	1	9	1001
2	10	A	1010
3	11	B	1011
4	100	C	1100
5	101	D	1101
6	110	E	1110
7	111	F	1111

Primjer 3. Prevedi broj u oktalnom sustavu u broj u binarnom sustavu.

$\underbrace{1}_{*}\underbrace{6}_{**}{}_{(8)} = \overbrace{1}^{*\text{ tablica}} \underbrace{110}_{**\text{ tablica}}{}_{(2)} = 1100_{(2)}$ $\qquad$ $5407_{(8)} = \underbrace{\underbrace{101}_{5}\underbrace{110}_{4}\underbrace{000}_{0}\underbrace{111}_{7_{(8)}}}_{(2)} = 101110000111_{(2)}$

$10010111001_{(2)} = 2271_{(8)}$ $\qquad$ $11111111111_{(2)} = 3777_{(8)}$

Primjer 4. Prevedi broj u heksadekatskom sustavu u broj u binarnom sustavu.

$\underbrace{6}_{*}\underbrace{C}_{**}\underbrace{9}_{***}{}_{(16)} = \overbrace{110}^{*\text{ tablica}}\underbrace{1100}_{**\text{ tablica}}\overbrace{1001}^{***\text{ tablica}}{}_{(2)} = 11011001001_{(2)}$ $\qquad$ $1111111111_{(2)} = 3FF_{(16)}$

$2EB3_{(16)} = \underbrace{\underbrace{10}_{2}\underbrace{1110}_{E}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{0011}_{3_{(16)}}}_{(2)} = 10111010110011_{(2)}$ $\qquad$ $110001011101011_{(2)} = 62EB_{(16)}$

1.1.2. PRIJELAZ IZ DEKATSKOG SUSTAVA

Primjer 5. Pretvorimo u sustav s bazom **2** broj 12 iz dekatskog sustava.

BROJ	12	6	3	1
DIJELIMO S **2**	6	3	1	0
OSTATAK	**0**	**0**	**1**	**1**

Broj u binarnom sustavu je ,čitajući s desna na lijevo, **1100$_{(2)}$**

$$\begin{aligned} 12 &= 2\cdot 6+0 \Rightarrow 0 \\ 6 &= 2\cdot 3+0 \Rightarrow 0 \\ 3 &= 2\cdot 1+1 \Rightarrow 1 \\ 1 &= 2\cdot 0+1 \Rightarrow 1 \end{aligned} \uparrow \quad \Rightarrow \text{ binarni broj glasi } \mathbf{1100_{(2)}}$$

Primjer 6. Pretvorimo u sustav s bazom **8** broj 238 iz dekatskog sustava.

BROJ	238	29	3
DIJELIMO S **8**	29	3	0
OSTATAK	**6**	**5**	**3**

Broj u binarnom sustavu je ,čitajući s desna na lijevo, **356$_{(8)}$**

$$\begin{aligned} 238 &= 8\cdot 29+6 \Rightarrow 6 \\ 29 &= 8\cdot 3+5 \Rightarrow 5 \\ 3 &= 8\cdot 0+3 \Rightarrow 3 \end{aligned} \uparrow \quad \Rightarrow \text{ broj u oktalnom sustavu glasi } \mathbf{356_{(8)}}$$

Primjer 7. Prevedi u oktalni i heksadekatski sustav broj 243681. $\qquad$ R: $733741_{(8)}, 3B7E1_{(16)}$

Primjer 8. Odredi binarni prikaz broja 75. $\qquad$ R: $1001011_{(2)}$

2. MATEMATIČKA INDUKCIJA

PRINCIP MATEMATIČKE INDUKCIJE: Ako neka tvrdnja vrijedi za broj **1** i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj **n** slijedi da vrijedi i za sljedeći broj **n + 1**, tada ona vrijedi za svaki prirodni broj **n**.

(T1) BAZA INDUKCIJE – provjera za **n = 1**

(T2) PRETPOSTAVKA INDUKCIJE – pretpostavka za **n = k**

(T3) KORAK INDUKCIJE – dokaz da vrijedi za **n = k + 1**

Ako su zadovoljena sva tri koraka, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Primjer 1. Dokažite da vrijedi relacija $1+3+5+...+(2n-1)=n^2, \forall n\in N$

(T1) BAZA INDUKCIJE

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 1-1=1^2 \quad \Rightarrow \quad 1=1$$

(T2) PRETPOSTAVKA INDUKCIJE

$$n=k \qquad 1+3+5+...+(2k-1)=k^2 \; *$$

(T3) KORAK INDUKCIJE

$$n=k+1 \qquad \underbrace{1+3+5+...+(2k-1)}_{\text{pretpostavka } *}+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

$$k^2+(2k+2-1)=(k+1)^2 \qquad \forall n\in N$$

$$k^2+2k+1=(k+1)^2$$

Po relaciji za kvadrat binoma slijedi

$$(k+1)^2=(k+1)^2$$

Primjer 2. Dokažite da vrijedi relacija $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n\in N$

(T1) BAZA INDUKCIJE $\quad n=1 \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{1(1+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad 1=1$

(T2) PRETPOSTAVKA INDUKCIJE $\quad n=k \quad 1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2} \; **$

(T3) KORAK INDUKCIJE

$$n=k+1 \qquad \underbrace{1+2+3+...+k}_{\text{pretpostavka } **}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad \forall n\in N$$

Izlučimo zajednički član

$$\frac{k+1}{2}(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Primjer 3. Dokazati da je $4^n+15n-1$ djeljivo s 9 za svaki prirodni broj n.

(T1) BAZA INDUKCIJE

$n=1 \Rightarrow 9\,|\,4^1+15\cdot 1-1=18 \Rightarrow 9\,|\,18 \Rightarrow$ točno jer 9 dijeli 18 ili 18 je djeljivo s 9

(T2) PRETPOSTAVKA INDUKCIJE

$n=k \quad 9\,|\,4^k+15k-1$ ***

(T3) KORAK INDUKCIJE

$$n=k+1 \Rightarrow 9\,|\,4^{k+1}+15(k+1)-1$$

$$9\,|\,4^k\cdot 4+15k+15-1$$

$$9\,|\,\underbrace{4^k+15k-1}_{***\ \Rightarrow\ \vdots 9}+4^k\cdot 3+15$$

$$9\,|\,\underbrace{4^k+15k-1}_{***\ \Rightarrow\ \vdots 9}+4^k\cdot 2-15k+16$$

$$9\,|\,\underbrace{4^k+15k-1}_{***\ \Rightarrow\ \vdots 9}+4^k-30k+17$$

$$9\,|\,\underbrace{4^k+15k-1}_{***\ \Rightarrow\ \vdots 9}-45k+18$$

$$9\,|\,\underbrace{9(-5k+2)}_{\vdots 9}$$

$$\forall n\in N$$

Primjer 4. Dokazati da je $2n^2+2n+4$ djeljivo s 2 za svaki prirodni broj n.

(T1) BAZA INDUKCIJE $n=1 \Rightarrow 2\,|\,2\cdot 1^2+2\cdot 1+4=8 \Rightarrow 2\,|\,8$

(T2) PRETPOSTAVKA INDUKCIJE $n=k \quad 2\,|\,2k^2+2k+4$ *

(T3) KORAK INDUKCIJE

$$n=k+1 \Rightarrow 2\,|\,2(k+1)^2+2(k+1)+4$$

$$2\,|\,2(k^2+2k+1)+2k+2+4$$

$$2\,|\,2k^2+4k+2+2k+2+4$$

$$2\,|\,\underbrace{2k^2+2k+4}_{*\ \Rightarrow\ \vdots 2}+4k+4$$

$$2\,|\,\underbrace{4(k+1)}_{\vdots 2}$$

$$\forall n\in N$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Dokažite da vrijedi relacija $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n\in N$
2. Dokažite da vrijedi relacija $5+8+11+...+(3n+2)=\dfrac{n(3n+7)}{2}, \forall n\in N$
3. Dokazati da je 7^n+3n-1 djeljivo s 9 za svaki prirodni broj n.

3. TRIGONOMETRIJSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

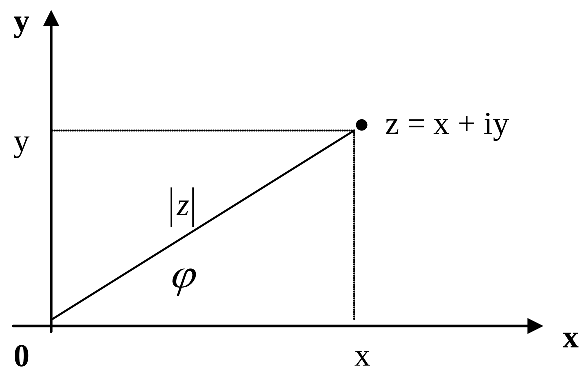
♦ ALGEBARSKI OBLIK $\boxed{z=x+iy \;\rightarrow\; \text{x = Rez, y = Imz}}$

♦ APSOLUTNA VRIJEDNOST

$$\boxed{|z|=\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}}$$

♦ ARGUMENT φ

$$\boxed{tg\varphi=\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}=\frac{y}{x}}$$



♦ TRIGONOMETRIJSKI OBLIK $\boxed{z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$

Primjer 1. Prikaži u trigonometrijskom obliku $z=\sqrt{3}+i$

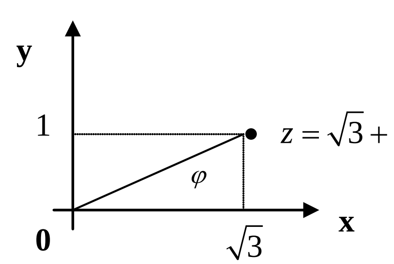
$$z=\sqrt{3}+i\rightarrow \operatorname{Re} z=x=\sqrt{3}, \operatorname{Im} z=y=1$$

$2\pi \; rad=360°$
$\pi \; rad=180°$

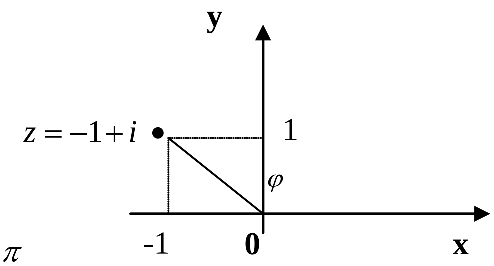
apsolutna vrijednost $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

argument $tg\varphi=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{6}$

trigonometrijski oblik $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$



Primjer 2. Prikaži u trigonometrijskom obliku $z=-1+i$

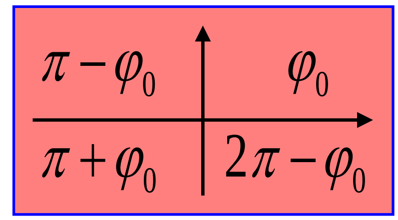


$z=-1+i \rightarrow \operatorname{Re} z = x = -1, \operatorname{Im} z = y = 1$

apsolutna vrijednost $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

argument $tg\varphi=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{-1}=-1 \Rightarrow tg\varphi_0=1 \Rightarrow \varphi_0=\dfrac{\pi}{4}$

$\varphi \in II \Rightarrow \varphi=\pi-\varphi_0=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$



trigonometrijski oblik $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

3.1. MNOŽENJE, DIJELJENJE I POTENCIRANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Zadana su dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku: $\begin{cases} z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi) \\ w=|w|(\cos\theta+i\sin\theta)\end{cases}$

Θ MNOŽENJE $\boxed{z\cdot w=|z|\cdot|w|\big(\cos(\varphi+\theta)+i\sin(\varphi+\theta)\big)}$

Θ DIJELJENJE $\boxed{\dfrac{z}{w}=\dfrac{|z|}{|w|}\big(\cos(\varphi-\theta)+i\sin(\varphi-\theta)\big)}$

Θ POTENCIRANJE $\boxed{z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}$

Primjer 1. Izračunaj $z\cdot w, z:w, z^3$ uz zadane $z=3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ i $w=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$$z\cdot w=3\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=6\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z}{w}=\frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z^3=3^3\left(\cos 3\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 3\cdot\frac{\pi}{3}\right)=27(\cos\pi+i\sin\pi)$$

3.2. KORJENOVANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\Rightarrow\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),k=0,1,\ldots,n-1$$

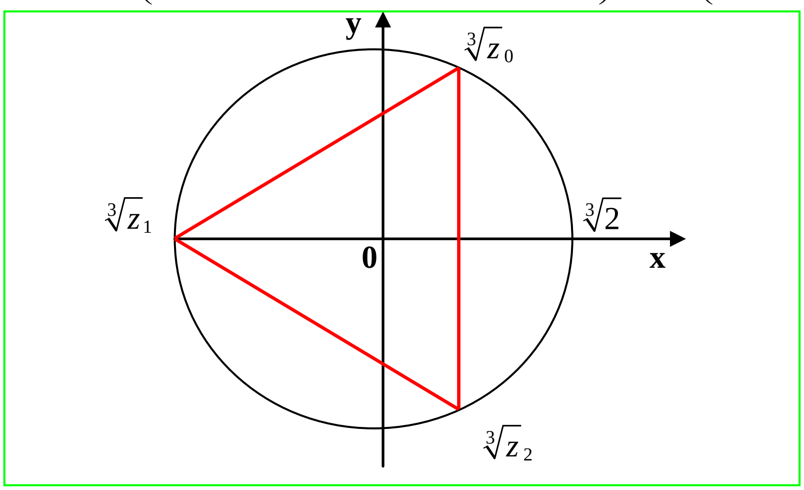
Primjer 1. Odredi $\sqrt[3]{z}$ kompleksnog broja $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),k=0,1,2$$

$$k=0\ \ldots\ \sqrt[3]{z_0}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$k=1\ \ldots\ \sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$k=2\ \ldots\ \sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$



ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Pretvori u trigonometrijski oblik $z=\sqrt{3}-i$ i $w=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$
2. Izračunaj $z\cdot w, z:w, z^4, w^6$ uz zadane $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ i $w=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$
3. Odredi $\sqrt[4]{z}$ kompleksnog broja $z=\sqrt{3}+i$ .Nacrtaj rješenja.
4. Odredi $\sqrt[3]{w}$ kompleksnog broja $w=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. Nacrtaj rješenja.

4. BINOMNI TEOREM

4.1. BINOMNI KOEFICIJENTI

Izračunavanje FAKTORIJELA $\boxed{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}$

Primjer 1. $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$ $\quad 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ ili $5! = 5\cdot4! = 5\cdot24 = 120$

n! ⟵ “ en faktorijela”

BINOMNI KOEFICIJENTI $\binom{n}{k}$ uz uvijet da su $n\in N, k\in N$ i $k\le n$.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(\cdot n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}}$$

$\binom{n}{k}$ ⟵ “ en povrh ka”

KAKO RAČUNATI: U brojniku i nazivniku se množi **k** članova, sa razlikom što u brojniku množimo od **n** , a u nazivniku od 1 do **k**.

Primjer 2. $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$ $\quad \binom{6}{2} = \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 15$ $\quad \binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20$ $\quad \binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35$

4.2. SVOJSTVA BINOMNIH KOEFICIJENATA

Navodimo neka od važnijih svojstava binomnik koeficijenata.

$\boxed{\binom{n}{0} = 1}$ $\quad \boxed{\binom{n}{n} = 1}$ $\quad \boxed{\binom{n}{1} = n}$ $\quad \boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}}$ $\quad \boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ (%)

Primjer 3. $\binom{100}{98} = \binom{100}{100-98} = \binom{100}{2} = \frac{100\cdot99}{1\cdot2} = 4950$ korištenjem formule (%)

$\binom{10}{8} = \binom{10}{10-8} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot9}{1\cdot2} = 45$ formula (%) koristi se kada je $k > \frac{n}{2}$

4.3. PASCALOV TROKUT

1	n = 0	k = 0
1 + 1	n = 1	k = 0,1
1 2 1	n = 2	k = 0,1,2
1 3 3 1	n = 3	k = 0,1,2,3
1 4 6 4 1	n = 4	k = 0,1,2,3,4

6 4 iz tablice

Primjer 4. $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}+\binom{4}{1}=6+4=10$

4.4. BINOMNA FORMULA

Korištenjem binomne formule moguće je izvesti poznate relacije koje se susreću u nastavi matematike.

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^{n-0}b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Primjer 5.

$$(a+b)^2=\binom{2}{0}a^{2-0}b^0+\binom{2}{1}a^{2-1}b^1+\binom{2}{2}a^0b^2=1\cdot a^2\cdot b^0+2\cdot a^1\cdot b^1+1\cdot a^0\cdot b^2=a^2+2ab+b^2$$

..... dobili smo poznatu relaciju za kvadrat binoma ... $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunaj $\binom{15}{2}$, $\binom{45}{29}$, $\binom{15}{13}$, $\binom{51}{49}$
2. Izračunaj $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}-\binom{5}{1}+\binom{5}{4}$ korištenjem Pascalovog trokuta
3. Primjenom binomne formule raspiši $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^5$ te koeficijente provjeri Pascalovim trokutom.
4. Primjenom binomne formule raspiši $(2\mathrm{a}-3\mathrm{b})^6$.Možemo li koeficijente provjeriti P.T. ?
5. Odredi peti član u razvoju izraza $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{14}$. [1]
6. Odredi 4. član u razvoju izraza $(\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}^4)^6$.

[1] Korištenjem binomne forule ili formule za **k-ti član razvoja** $T_k=\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$