GIMNAZIJA I STRUKOVNA ŠKOLA JURJA DOBRILE PAZIN

NASTAVNI PREDMET: MATEMATIKA 3

Analitička geometrija u ravnini.

GORTAN ROBERT

1.11.2010

Nastavno pismo 3

TABLICA SADRŽAJA

3. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNINI.

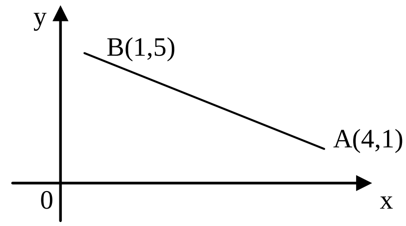
3.1.UDALJENOST TOČAKA U RAVNINI.

Ako su zadane dvije točke u koordinatnom sustavu, kako odrediti njihovu udaljenost?

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \quad \rightarrow \quad |AB| = d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (28)$$

☺ **Primjer 1.** Odredi udaljenost točaka A(4,1) i B(1,5).

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(1-4)^2 + (5-1)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



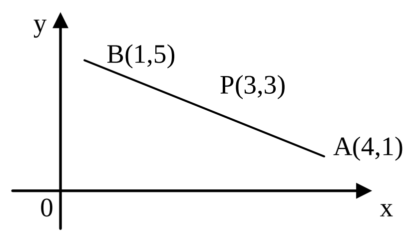
3.2. POLOVIŠTE DUŽINE.

Ako su zadane dvije točke i njihova spojnica dužina, kako odrediti **polovište** ili točku koja dijeli dužinu na dva jednaka dijela?

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \quad \rightarrow \quad x_P = \frac{x_A + x_B}{2}, y_P = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad (29)$$

☺ **Primjer 1.** Odredi polovište dužine AB ako su A(4,1) i B(2,5).

$$P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$
$$P\left(\frac{4+2}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \Rightarrow P(3,3) \quad \text{poloviste duzine}$$



3.3. POVRŠINA TROKUTA.

Ako su zadane tri točke u koordinatnom sustavu, kako izračunati **površinu trokuta** što ga te tri točke određuju?

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \quad P = \frac{1}{2}\left|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\right| \quad (30)$$

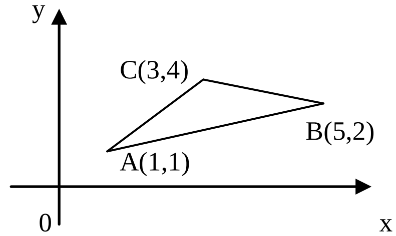
NAPOMENA: Ako su točke trokuta orijentirane u smjeru kazaljke na satu, površina bi bila negativna pa je stoga u formulu uključena i apsolutna vrijednost.

☺ **Primjer 1.** Odredi površinu trokuta ΔABC ako su A(1,1),B(5,2) i C(3,4).

$$P=\frac{1}{2}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$

$$P=\frac{1}{2}\left|1(2-4)+5(4-1)+3(1-2)\right|$$

$$P=\frac{1}{2}\left|-2+15-3\right|=\frac{1}{2}\left|10\right|=5 \text{ kv.jedinica}$$



NAPOMENA: Površinu trokuta moguće je izračunati i po Heronovoj formuli

$P=\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-c)}$ (31) gdje je **s poluopseg** trokuta $s=\frac{a+b+c}{2}$ (32).

- a,b i c su duljine stranica trokuta (formula (28)) $a=d(B,C), b=d(A,C), c=d(A,B)$.

3.4. TEŽIŠTE TROKUTA.

Ako su zadane tri točke u koordinatnom sustavu, kako izračunati **težište trokuta** što ga te tri točke određuju?

- **Težište** je točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta.
- **Težišnice** su dužine koje spajaju vrh trokuta i polovište nasuprotne stranice.

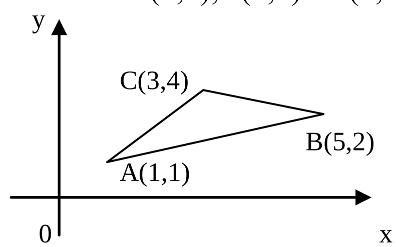
$$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C) \rightarrow T\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right) \quad (33) \quad T(x_T,y_T)$$

☺ **Primjer 1.** Odredi koordinate težišta trokuta ΔABC ako su A(1,1),B(5,2) i C(3,4).

$$T\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

$$T\left(\frac{1+5+3}{3},\frac{1+2+4}{3}\right)$$

$$T\left(3,\frac{7}{3}\right) \quad \text{teziste trokuta ABC}$$



☺ **Primjer 2.** Odredi duljinu težišnice iz vrha A u trokutu iz primjera 1.

$$P\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right) \quad (29)$$

$$P\left(\frac{5+3}{2},\frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow P(4,3)$$

$$|t_A|=d(A,P) \quad \text{spojnica tocaka } A(1,1) \text{ i } P(4,3)$$

$$d(A,P)=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2} \qquad (28)$$

$$d(A,B)=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

4. OBLICI JEDNADŽBE PRAVACA.

Postoje tri karakteristična oblika jednadžbe pravca.

4.1.IMPLICITNI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA.

A,B i C su tri realna broja $A, B, C \in \Re$ takva da A i B nisu u isto vrijeme jednaki 0 $B = 0, C \neq 0$ ili $C = 0, B \neq 0$. **Implicitni oblik jednadžbe pravca** glasi $Ax + By + C = 0$. (34)

4.2.EKSPLICITNI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA

Ako su **k** i **l** realni brojevi $k, l \in \Re$, k je **koeficijent pravca,** a l **odsječak na osi y.**

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca glasi $y = kx + l$ (35)

$$\begin{aligned} &Ax + By + C = 0 \\ &By = -Ax - C \quad /:B \\ &y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y = kx + l \text{ gdje je} \\ &k = -\frac{A}{B} \quad \text{koeficijent smjera} \\ &l = -\frac{C}{A} \quad \text{odsjecak na osi y} \end{aligned}$$

4.3.SEGMENTNI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA

Ako su **m** i **n** realni brojevi $m.n \in \Re$, m je **odsječak na osi x,** a n **odsječak na osi y.**

Segmentni oblik jednadžbe pravca glasi $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ (36)

$$\begin{aligned} &Ax + By + C = 0 \\ &Ax + By = -C \quad /:(-C) \\ &-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1 \\ &\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \\ &m = -\frac{C}{A} \quad \text{odsjecak na osi x} \\ &n = -\frac{C}{B} \quad \text{odsjecak na osi y} \end{aligned}$$

☺ **Primjer 1.** Pretvori u ostale oblike jednadžbu pravca $2x + 4y - 6 = 0$.

$$\begin{aligned} &4y = -2x + 6 \quad /:4 \\ &y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{eksplicitni oblik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2x + 4y = 6 \quad /:6 \\ &\frac{2x}{6} + \frac{4y}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1 \quad \text{segmentni oblik} \end{aligned}$$

☺ **Primjer 2.** Pretvori u ostale oblike jednadžbu pravca $3x+6y-18=0$ te nacrtaj pravac.

$3x+6y-18=0$

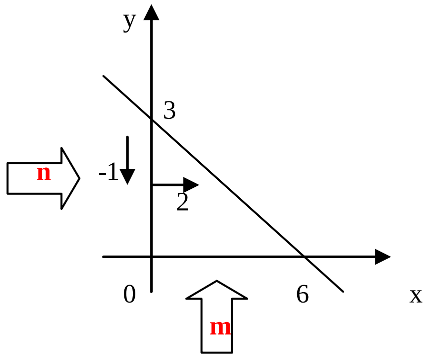
$6y=-3x+18 \quad /:6$

$y=-\frac{1}{2}x+3$

$k=-\frac{1}{2}$ koeficijent pravca

$l=3$ odsjecak na osi y

eksplicitni oblik jednadžbe pravca



$3x+6y-18=0$

$3x+6y=18 \quad /:18$

$\frac{3x}{18}+\frac{6y}{18}=1$

$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$

$m=6$ odsjecak na osi x

$n=3$ odsjecak na osi y

segmentni oblik jednadžbe pravca

NAPOMENA: Kod crtanja ekspolicitnog oblika jednadžbe pravca, prvo ucrtamo **odsječak na osi y** i dobijemo točku A(0,l). Od te točke crtamo koeficijent pravca tako da **brojnik crtamo po osi y, a nazivnik po osi x.**

- u primjeru 2. ucrtali smo točku A(0,3). Od te točke crtamo koeficijent pravca $k=\frac{-1}{2}$ tako da od A(0,3) idemo **1 dole** po osi y te **2 desno** po osi x. Dobijemo točku B(2,2). Spojimo te dvije točke i dobili smo pravac $y=-\frac{1}{2}x+3$.

4.4. JEDNADŽBE PRAVACA KROZ JEDNU I DVIJE TOČKE.

Kako odrediti jednadžbu pravca ako su zadane dvije točke ili ako nam je poznata jedna točka i koeficijent smjera?

4.5.JEDNADŽBA PRAVCA KROZ JEDNU TOČKU.

Zadana je jedna točke $T(x_1,y_1)$ i koeficijent smjera pravca koji prolazi točkom T.

Jednadžba tog pravca glasi $y-y_1=k(x-x_1)$. (37) **Koeficijent smjera** predstavlja tangens kuta što ga pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi x. $k=tg\alpha$ (38)

☺ **Primjer 1.** Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom T(1,2) i ima koeficijent smjera k=3.

$T(1,2), k=3$

$y-y_1=k(x-x_1)$

$y-2=3(x-1)$

$y-2=3x-3$

$y=3x-3+2$

$y=3x-1$

4.6.JEDNADŽBA PRAVCA KROZ DVIJE TOČKE.

Zadane su dvije točke $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$. Jednadžba pravca kroz dvije točke glasi

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ (39) gdje je $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (40) koeficijent smjera pravca.

☺ **Primjer 1.** Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkama $T_1(1,2)$ i $T_2(4,5)$. Koliki kut zatvara pravac s pozitivnim smjerom osi x?

$$T_1(1,2), T_2(4,5)$$
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - 2 = \frac{5-2}{4-1}(x-1)$$

$$y - 2 = \frac{3}{3}(x-1)$$
$$y - 2 = x - 1$$
$$y = x - 1 + 2$$
$$y = x + 1$$

$$k = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha = 1 \quad /\operatorname{arctg}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

5. PARALELNOST I OKOMITOST PRAVACA.

Zadana su dva pravca $p_1 ... y = k_1 x + l_1, p_2 ... y = k_2 x + l_2$.

- Pravci su **paralelni** ako su im koeficijenti jednaki tj. $k_1 = k_2$ (41).
- Pravci su **okomiti** ako su im koeficijenti suprotni i recipročni brojevi, tj. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ (42)

☺ **Primjer 1.** Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom A(-1,2) i :

a) paralelan je pravcu $y - 2x - 1 = 0$

b) okomit je na pravac $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

$$y - 2x - 1 = 0$$
$$y = 2x + 1 \Rightarrow k_2 = 2$$
$$k_1 = k_2 \Rightarrow k_1 = 2 \text{ paralelni pravci}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \quad /3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}$$
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_1 = \frac{2}{3} \text{ okomiti pravci}$$

a)
$$y - y_1 = k_1(x - x_1)$$
$$y - 2 = 2(x+1)$$
$$y - 2 = 2x + 2$$
$$y = 2x + 4$$

b)
$$y - y_1 = k_1(x - x_1)$$
$$y - 2 = \frac{2}{3}(x+1)$$
$$y - 2 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

6. PRESJEK DVAJU PRAVACA.

Zadana su dva pravca $p_1 ... y = k_1 x + l_1, p_2 ... y = k_2 x + l_2$.

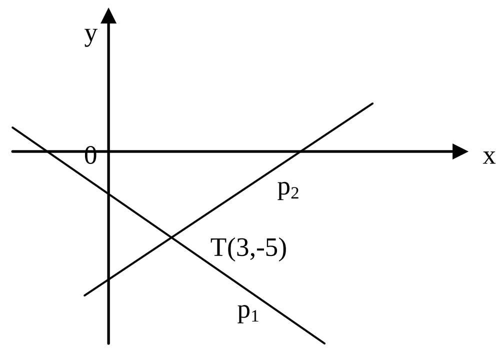
Presjek pravaca možemo odrediti **analitički (računski)** metodom suprotnih koeficijenata, metodom supstitucije ili metodom komparacije te **grafičkom metodom**.

☺ **Primjer 1.** Odredi presjek pravaca $x + y + 2 = 0, x - y - 8 = 0$ analitički i grafički.

$$\begin{array}{l} x + y + 2 = 0 \\ x - y - 8 = 0 \quad / + \\ \hline 2x - 6 = 0 \\ 2x = 6 \quad /:2 \\ x = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + 2 = 0 \\ 3 + y + 2 = 0 \\ y = -5 \end{array}$$

$T(3,-5)$ presjek pravaca



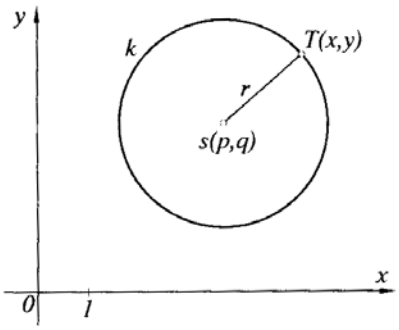
$p_1 ... y = -x - 2, p_2 ... y = x - 8$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredi udaljenost točaka A(-1,2) i B(3,-2).
2. Odredi polovišta (P,Q,R) stranica trokuta ΔABC ako su A(1,2), B(-1,2) i C(-5,4).
3. Odredi površinu trokuta iz zadatka 2.
4. Odredi težište trokuta iz zadatka 2.
5. Odredi duljine težišnice iz vrha B trokuta iz zadatka 2.
6. Odredi jednadžbu težišnice iz vrha C trokuta iz zadatka 2.
7. Odredi jednadžbu stranice c trokuta iz zadatka 2.
8. Odredi jednadžbu visine iz vrha A trokuta iz zadatka 2.
9. Odredi jednadžbu pravaca koji prolaze točkom A(-5,4) koji je:
   a. okomit napravac 2x – 3y + 6 = 0
   b. paralelan pravcu $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$.
10. Odredi presjek pravaca 2x + y – 5 = 0 i 3x – y + 6 = 0 analitički i grafički.

7. KRUŽNICA.

DEFINICIJA: Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su od čvrste točke ili **središta** jednako udaljene. Udaljenost središta i bilo koje točke na kružnici označava se s $d(S,T)=r$ (43) i naziva se **polumjer kružnice.**



$k(S,r)=\{T(x,y):d(S,T)=r\}$ (44).

Jednadžba kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ (45) gdje je S(p,q) **središte**, a r **polumjer kružnice.** Ukoliko je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sutava, jednadžba glasi $x^2+y^2=r^2$ (46).

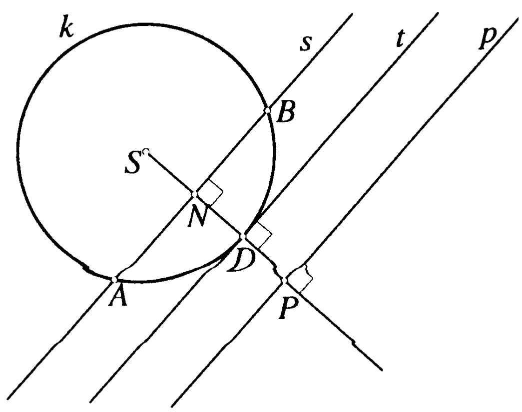
☺ **Primjer 1.** Napiši jednadžbu kružnice ako je središte u točki S(2,-3), a polumjer je 5.

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25 \Rightarrow k(2,-3;5)$$

☺ **Primjer 2.** Odredi središte i polumjer kružnice ako je zadana sa $k(-1,2;4)$.

$$k(-1,2;4) \Rightarrow (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=16 \Rightarrow S(-1,2), r=4$$

7.1.ODNOS PRAVCA I KRUŽNICE.



ODNOS PRAVCA I KRUŽNICE

s… pravac **siječe** kružnicu **k** $s\cap k=\{A,B\}$
t… pravac **dodiruje** kružnicu **k** $s\cap k=\{D\}$
p… pravac **ne siječe** kružnicu **k** $s\cap k=\{\ \}$

- Pravac i kružnica mogu biti u sljedeća tri odnosa:
  - pravac **siječe** kružnicu u dvije točke $s\cap k=\{A,B\}$ i naziva se **SEKANTA (s)**
  - pravac **dodiruje** kružnicu u jednoj točki $s\cap k=\{D\}$ i naziva se **TANGENTA (t)**
  - pravac **ne siječe** kružnicu $s\cap k=\varnothing$ **(p)**

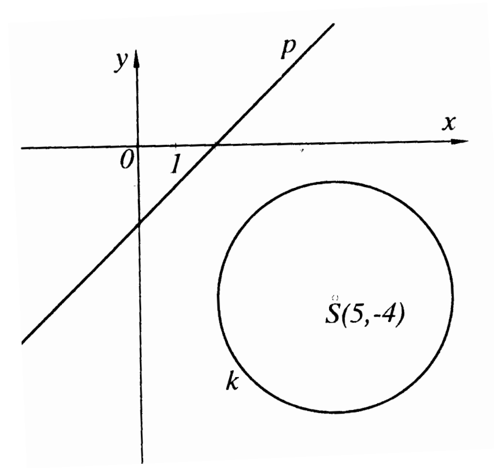
☺ **Primjer 1.** U kojem su odnosu kružnica $(x-5)^2+(y+4)^2=9$ i pravac $x-y-2=0$?

$$(x-5)^2+(y+4)^2=9$$
$$x-y-2=0 \Rightarrow x=y+2$$

izrazimo nepoznanicu x i uvrstimo je u jednadžbu kružnice

$$(y+2-5)^2+(y+4)^2=9$$
$$(y-3)^2+(y+4)^2=9$$
$$y^2-6y+9+y^2+8y+16-9=0$$
$$2y^2+2y+16=0 \quad /:2$$
$$y^2+y+8=0$$
$$D=b^2-4ac=1-32=-31$$
$$D<0$$

Ispitajmo ima li kvadratna jednadžba rješenja promatrajući ***diskriminantu***

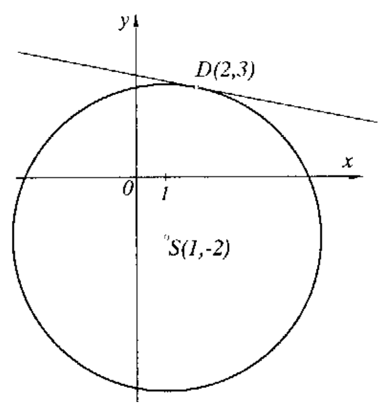


Kvadratna jednadžba nema relanih rješenja jer je diskriminanta manja od nule.

Zaključujemo da se pravac i kružnica ne sijeku.

☺ **Primjer 2.** U kojem su odnosu kružnica $x^2+y^2-2x+4y-21=0$ i pravac $x+5y=17$?

$$x^2+y^2-2x+4y-21=0 \Rightarrow x^2-2x+y^2+4y=21$$
$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4=-21 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=26 \ldots k(1,-2;\sqrt{26})$$



$$(x-1)^2+(y+2)^2=26$$
$$x+5y=17 \Rightarrow x=17-5y$$

$$(-5y+17-1)^2+(y+2)^2=26$$
$$(16-5y)^2+(y+2)^2=26$$
$$256-160y+25y^2+y^2+4y+4-26=0$$
$$26y^2-156y+234=0 \quad /:2$$
$$13y^2-78y+117=0$$
$$D=b^2-4ac=6084-6084=0$$
$$D=0$$

$$13y^2-78y+117=0$$
$$y_{1,2}=\frac{78\pm 0}{26}=3$$
$$x=17-5y=17-15=2$$

$$D(2,3)$$

Određujemo točku dodira pravca i kružnice D(2,3)

Kvadratna jednadžba ima jedno dvostruku relano rješenje jer je diskriminanta jednaka nula.

Zaklјućujemo da se pravac i kružnica dodiruju.

NAPOMENA: Ako je diskriminanta dobivene kvadratne jednadžbe (kao u primjerima 1 i 2) veća od nule, tada pravac i kružnica imaju dvije točke presjeka . Kažemo da se pravac i kružnica sijeku. Zaključimo, diskriminanta određuje odnos pravca i kružnice i to:

- ako je **D** < **0**, pravac i kružnica se **ne sijeku** (47)
- ako je **D = 0**, pravac i kružnica se **dodiruju** (48)
- ako je **D** > **0**, pravac i kružnica se **sijeku** (49)

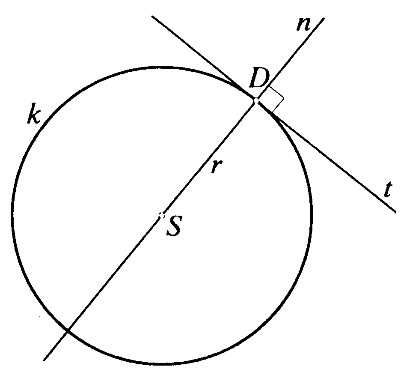
☺ **Primjer 3.** Odredi jednadžbu kružnice koja prolazi točkom T(4,3) sa središtem u točki S(2,1).

$$r = d(S,T) = \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow k(2,1;\sqrt{8})$$

7.2.TANGENTA I NORMALA KRUŽNICE

Normala kružnice n uvijek prolazi središtem kružnice i točkom **D** na kružnici. Točkom D prolazi tangenta **t** koja je okomita na normalu. $t \perp n$



- **Tangenta** kružnice u točki kružnice $D(x_1, y_1)$

(50) $(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-q)=r^2$ središte kružnice S(p,q)

(51) $xx_1 + yy_1 = r^2$ središte kružnice S(0,0)

Ako sa točka $T(x,y)$ nalazi **izvan kružnice**, tada je moguće povući **dvije tangente** iz te točke na kružnicu.**(UVJET TANGENCIJALNOSTI)**

- Uvjet da je pravac $y = kx + l$ koji prolazi točkom $T(x,y)$ tangenta kružnice glasi

  $r^2(1+k^2) = (q - kp - l)^2$ (52) ili $r^2(1+k^2) = l^2$. (53)

NAPOMENA: Prije primjene formula za određivanje jednadžbi tangenata (50) do (53), potrebno je provjeriti nalazi se točka na kružnici ili ne.

☺ **Primjer 1.** Odredi jednadžbu tangente u točki $D(3, y<0)$ kružnice $x^2+y^2=25$.

Točka se nalazi na kružnici sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava S(0,0), pa ćemo koristiti formulu (51) za određivanje jednadžbe tangente u točki D.

$$x^2+y^2=25 \Rightarrow 3^2+y^2=25$$
$$y^2=25-9 \Rightarrow y^2=16 \quad /\sqrt{\ }$$
$$y_{1,2}=\pm 4 \Rightarrow y=-4$$
$$D(3,-4)$$

zbog uvjeta iz točke D(3,y < 0),
*y = - 4 pa je točka **D(3,-4)***

$$xx_1+yy_1=r^2 \quad (51)$$
$$3x-4y=25$$
$$-4y=-3x+25 \quad /:(-4)$$
$$y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$$

uvrštavamo u jednadžbu tangente (51) i dobijemo jednadžbu tangente iz točke D na kružnici

☺ **Primjer 2.** Odredi jednadžbu tangente u točki $D(5, y>0)$ kružnice $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

Točka se nalazi na kružnici sa središtem u točki S(2,1), pa ćemo koristiti formulu (50) za određivanje jednadžbe tangente u točki D.

$$(x-2)^2+(y-1)^2=25 \Rightarrow (5-2)^2+(y-1)^2=25$$
$$9+(y-1)^2=25 \Rightarrow (y-1)^2=16 \quad /\sqrt{\ }$$
$$y-1=\pm 4 \Rightarrow \begin{cases} y_1=4+1=5 \\ y_2=-4+1=-3 \end{cases} \Rightarrow y=5$$
$$D(5,5)$$

zbog uvjeta iz točke D(5,y > 0),
*y = 5, pa je točka **D(5,5)***

$$(x-p)(x_1-p)+(y-q)(y_1-q)=r^2$$
$$(5-2)(x-2)+(5-1)(y-1)=25$$
$$3(x-2)+4(y-1)=25$$
$$3x-6+4y-4=25$$
$$4y=-3x+35 \quad /:4$$
$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{35}{4}$$

uvrštavamo u jednadžbu tangente (50) i dobijemo jednadžbu tangente iz točke D na kružnici

☺ **Primjer 3.** Odredi jednadžbu tangente kružnice $(x+2)^2+(y-7)^2=5$ paralelne s $y=-2x$.

U ovom primjeru moramo koristiti uvjet tangencijalnosti (52).

$$r^2(1+k^2)=(q-kp-l)^2$$
$$5(1+4)=(7-(-2)(-2)-l)^2$$
$$25=(7-4-l)^2$$
$$25=(3-l)^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$3-l=\pm 5 \Rightarrow \begin{cases} l_1=3-5=-2 \\ l_1=3+5=8 \end{cases}$$

pravac i tangenta su paralelni pa je koeficijent tangente jednak koeficijentu pravca $k_2 = k_1 = -2$

$$t_1 ... y=kx+l \Rightarrow y=-2x-2$$
$$t_1 ... y=kx+l \Rightarrow y=-2x+8$$

Dvije paralelne tangentesu rješenje primjera 3.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredi jednadžbu kružnice sa središtem u točki S(2,-3) koja prolazi točkom T(4,1).
2. Odredi jednadžbu tangente kružnice $k\left(-2,7;\sqrt{5}\right)$ koja je okomita na pravac $y+3x-5=0$.
3. Odredi jednadžbu tangente na kružnicu $x^2+y^2=20$ u točki D(2,y>0).
4. Odredi tangente na kružnicu $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ iz točke T(3,4).
5. U kojem su odnosu pravac $7x-17y+169=0$ i kružnica $x^2+y^2=169$?
6. U kojem su odnosu pravac $2x+y=9$ i kružnica $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$?

- **UPUTA** (zadatak 3): Ukoliko **tangenta** kružnice $y=kx+l$ **prolazi točkom** T(3,4), tada možemo pisati $y=kx+l \Rightarrow 4=3k+l$ te izrazimo **odsječak** $l=4-3k$ i uvrstimo u uvijet tangencijalnosti (52) ili (53)