GIMNAZIJA I STRUKOVNA ŠKOLA JURJA DOBRILE PAZIN

NASTAVNI PREDMET: MATEMATIKA 3

Eksponencijalna i logaritamska funkcija.

GORTAN ROBERT

1.11.2010

Nastavno pismo 2

Tablica sadržaja

2.1. EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA.

- **Eksponencijalna funkcija** je funkcija oblika $f(x) = a^x$ (17) gdje je **a** baza, a **x** eksponent. Realni broj a je veći od nule i različit od jedan $(a \in \Re, a > 0, a \neq 1)$.
  - Eksponencijalna funkcija uvijek poprima pozitivne vrijednosti $(f(x) > 0, \forall x \in \Re)$.
  - ako je **a > 1**, eksponencijalna funkcija **strogo raste**
  - ako je **0 < a < 1**, eksponencijalna funkcija **strogo pada**
- **Logaritamska funkcija** je funkcija oblika $f(x) = \log_a x$ (18) gdje je **a** baza, a **x** numerus. Realni broj a je veći od nule i različit od jedan $(a \in \Re, a > 0, a \neq 1)$, a x je pozitivan realni broj $(x \in \Re, x > 0)$
  - Logaritamska funkcija je definirana samo za pozitivne vrijednosti numerusa, a može poprimiti i pozitivnu i negativnu vrijednost $(f(x) \in \Re, \forall x > 0)$.
  - ako je **a > 1**, logaritamska funkcija **strogo raste**
  - ako je **0 < a < 1**, logaritamska funkcija **strogo pada**

2.2. EKSPONENCIJALNE JEDNADŽBE.

Eksponencijalne jednadžbe su jednadžbe u kojima se nepoznanica nalazi u eksponentu. Rješavamo ih svođenjem na tri karakteristična oblika:

- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x)$ (19)
- $a^{f(x)} = b^{f(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$ (20)
- $a^{f(x)} = b \quad \Rightarrow \quad f(x) = \log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$ (21)

gdje su a i b pozitivni realni brojevi različiti od 1, a f(x) i g(x) polinomi određenog stupnja

Kod rješavanja eksponencijalnih jednadžbi služimo se **pravilima računanja s potencijama.** (22)

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a^x : a^y = a^{x-y} \qquad a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x \qquad a^1 = a \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

☺ **Primjer 1.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $3^x = 27$.

$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2$ potencije s jednakim bazama su jednake ako su jednaki i eksponenti

$x = 2$ rješenje jednadžbe je x = 2.

☺ **Primjer 2.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $4^{3x+1} = 8^{x-4}$.

$\Rightarrow$ Ove su baze potencije broja 2, pa tu jednadžbu svodimo na bazu 2:

$$\left(2^2\right)^{3x+1} = \left(2^3\right)^{x-4}$$
$$2^{2(3x+1)} = 2^{3(x-4)}$$

izjednačimo eksponente $\rightarrow$

$$2(3x+1) = 3(x-4)$$
$$6x - 3x = -12 - 2$$

$\rightarrow$

$$3x = -14 \quad /:3$$
$$x = -\frac{14}{3}$$

☺ **Primjer 3.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $0.04 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{125}\right)^{2-x} = 25^{1-x}$.

$$\frac{4}{100} \cdot \left(\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^3}\right)^{2-x} = 5^{2-2x}$$
$$\frac{1}{25} \cdot \left(5^{\frac{1}{2}-3}\right)^{2-x} = 5^{2-2x}$$
$$5^{-2} \cdot \left(5^{\frac{-5}{2}}\right)^{2-x} = 5^{2-2x}$$

$\rightarrow$

$$5^{-2} \cdot 5^{-5+\frac{5x}{2}} = 5^{2-2x}$$
$$5^{-2-5+\frac{5x}{2}} = 5^{2-2x}$$
$$5^{-7+\frac{5x}{2}} = 5^{2-2x}$$

$\rightarrow$

$$-7 + \frac{5}{2}x = 2 - 2x$$
$$\frac{5}{2}x + 2x = 2 + 7$$
$$\frac{9}{2}x = 9 \quad /\cdot 2$$
$$9x = 18 \quad /:9$$
$$x = 2$$

☺ **Primjer 4.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8$.

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8$$
$$\left(3^2\right)^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 2^3$$
$$3^{2x-4} \cdot 2^{2x-1} = 2^3 \quad /:2^3$$
$$3^{2x-4} \cdot \frac{2^{2x-1}}{2^3} = 1$$

$\rightarrow$

$$3^{2x-4} \cdot 2^{2x-4} = 1$$
$$(3 \cdot 2)^{2x-4} = 1$$
$$6^{2x-4} = 6^0$$
$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4 \quad /:2$$
$$x = 2$$

napomena: zadatak smo mogli riješiti i na ovaj način

$$9^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 8$$
$$\left(3^2\right)^{x-2} \cdot 2^{2x-1} = 2^3$$
$$3^{2x-4} \cdot 2^{2x-1} = 2^3 \quad /:2^3$$
$$3^{2x-4} \cdot \frac{2^{2x-1}}{2^3} = 1$$

$\rightarrow$

$$3^{2x-4} \cdot 2^{2x-4} = 1 \quad /:2^{2x-4}$$
$$3^{2x-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$$
$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Potencije različitih baza, ali jednakih eksponenata jednake su ako im je eksponent jednak 0.

$a^{f(x)} = b^{f(x)} \rightarrow f(x) = 0$

☺ **Primjer 5.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $9^{x-1}+3^{x-2}=738$.

⇒ Najprije sredimo jednadžbu i prebacimo broj 738 na lijevu stranu pa tako dobijemo:

$$3^{2(x-1)}+3^{x-2}-738=0$$
$$3^{2x-2}+3^{-2}\cdot 3^{x}-738=0$$
$$3^{-2}\cdot\left(3^{x}\right)^{2}+3^{-2}\cdot 3^{x}-738=0$$

Uvodimo novu nepoznanicu umjesto 3^x ,dakle $3^x=t$

Rješavamo kvadratnu jednadžbu.

$$\frac{1}{9}\cdot t^{2}+\frac{1}{9}\cdot t-798=0 \quad / \cdot 9$$
$$t^{2}+t-6642=0$$
$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$
$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 6642}}{2}=\frac{-1\pm 163}{2}$$
$$t_{1}=-82$$
$$t_{2}=81$$

Sada se vraćamo na početnu zamjenu:

$3^{x}=t_{1}$

$3^{x}=-82$ ⇒ ovom slučaju nema rješenja

$3^{x}=t_{2} \Rightarrow 3^{x}=3^{4}$

$3^{x}=81 \qquad x=4$

☺ **Primjer 6.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $9^{x-3}-3^{x-2}+2=0$

$$\left(3^{2}\right)^{x-3}-3^{x-2}+2=0$$
$$\left(3^{x-3}\right)^{2}-3^{x-2}+2=0$$
$$\left(3^{x}\cdot 3^{-3}\right)^{2}-3^{x}\cdot 3^{-2}+2=0 \quad \rightarrow$$
$$\left(3^{x}\right)^{2}\cdot\left(3^{-3}\right)^{2}-3^{x}\cdot 3^{-2}+2=0$$
$$3^{x}=t$$

$$\frac{1}{729}t^{2}-\frac{1}{9}t+2=0 \quad /\cdot 729$$
$$t^{2}-81t+1458=0$$
$$t_{1,2}=\frac{81\pm\sqrt{6561-5832}}{2}=\frac{81\pm 27}{2} \quad \rightarrow$$
$$t_{1}=\frac{81+27}{2}=54$$
$$t_{2}=\frac{81-27}{2}=27$$

$$3^{x}=54$$
$$x_{1}=\frac{\log 3}{\log 54}$$

$$3^{x}=27$$
$$3^{x}=3^{3}$$
$$x_{2}=3$$

☺ **Primjer 7.** Riješi eksponencijalnu jednadžbu $5^{x-1}+5^{x}+5^{x+1}=155$

$$5^{x-1}+5^{x-1+1}+5^{x-1+2}=155$$
$$5^{x-1}+5^{x-1}\cdot 5^{1}+5^{x-1}\cdot 5^{2}=155$$
$$5^{x-1}\cdot\left(1+5+5^{2}\right)=155 \quad \rightarrow$$
$$5^{x-1}\cdot\left(1+5+25\right)=155$$
$$5^{x-1}\cdot 31=155 \quad /:31$$

$$5^{x-1}=5$$
$$x-1=1$$
$$x=1+1$$
$$x=2$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješi eksponencijalne jednadžbe: a) $4^{-\frac{1}{2}x+2}=8^{-\frac{1}{2}x+2}$ b) $(0{,}75)^{2x}=\frac{16}{9}$
2. Riješi eksponencijalne jednadžbe: a) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$ b) $9^{x}-4\cdot 3^{x+3}=0$
3. Riješi eksponencijalne jednadžbe: a) $2^{x-1}+3\cdot 2^{x-2}+5\cdot 2^{x-3}=15$ b) $4^{x}-2^{x+3}+15=0$
4. Riješi eksponencijalne jednadžbe: a*) $4^{x}+6^{x}=2\cdot 9^{x}$ b) $25^{x+2}+5=6\cdot 5^{x+2}$

2.3. LOGARITAMSKE JEDNADŽBE.

Logaritamske jednadžbe su jednadžbe u kojima se nepoznanica nalazi u numerusu.

Rješavamo ih svođenjem na oblik $\log_a x=\log_a y \Leftrightarrow x=y$ (23) te korištenjem

$y=\log_a x \Rightarrow a^{y}=x$ (24) $\rightarrow$ **eksponencijalne jednadžbe**

gdje je **a** pozitivan realan broj različit od 1, a x pozitivan realni broj.

- Ako je baza a = 10, tada je logartitam DEKADSKI i pišemo $\log_{10} x=\log x$ (25)

Kod rješavanja logaritamskih jednadžbi služimo se **pravilima računanja s logaritmima.** (26)

$\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$	$\log_a x^{y}=y\cdot\log_a x$	$\log_{a^{y}} x=\frac{1}{y}\cdot\log_a x$	$\log_a a=1$
$\log_a x-\log_a y=\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_a \sqrt[y]{x}=\frac{1}{y}\cdot\log_a x$	$\log_x y=\frac{\log x}{\log y}$	$\log_a 1=0$

☺ **Primjer 1.** Izračunaj $\log_x 8=-3$

$\log_x 8=-3$

$\boxed{y=\log_a x \Rightarrow a^{y}=x}$

$x^{-3}=8$

$x=\sqrt[-3]{8}$

$\boxed{x^{n}=y \Rightarrow x=\sqrt[n]{y}}$

$x=\sqrt[-3]{2^{3}}$

$x=2^{\frac{3}{-3}}$

$x=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\boxed{\sqrt[m]{a^{n}}=a^{\frac{n}{m}}}$

☺ **Primjer 2.** Izračunaj $\log_x \frac{1}{8}=-\frac{3}{2}$

$\log_x \frac{1}{8}=-\frac{3}{2}$

$x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow$

$x=\sqrt[-\frac{3}{2}]{\frac{1}{8}}$

$x=\sqrt[-\frac{3}{2}]{2^{-3}}$

$\Rightarrow$

$x=2^{\frac{-3}{-\frac{3}{2}}}$

$x=2^{2}=4$

☺ **Primjer 3.** Logaritmiraj $x = \frac{10}{a\sqrt{b}}$

$$x = \frac{10}{a\sqrt{b}} \quad /\log$$

$$\log x = \log \frac{10}{a\sqrt{b}}$$

$$\log x = \log 10 - \log\left(a \cdot \sqrt{b}\right) = 1 - \left(\log a + \log\sqrt{b}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\log x = 1 - \log a - \log\sqrt{b}$$

$$\log x = 1 - \log a - \log b^{\frac{1}{2}}$$

$$\log x = 1 - \log a - \frac{1}{2}\log b$$

☺ **Primjer 4.** Odredi x ako je $\log x = 2\log a - \frac{1}{2}\log b$

$$\log x = 2\log a - \frac{1}{2}\log b$$

$$\log x = \log a^2 - \log b^{\frac{1}{2}}$$

$$\log x = \log a^2 - \log\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow$$

$$\log x = \log \frac{a^2}{\sqrt{b}} \quad /\text{anti}\log$$

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{b}}$$

NAPOMENA: Postoji još jedna važna i često korištena logaritamska formula $\boxed{x = a^{\log_a x}}$ (27)

☺ **Primjer 5.** Primjenom formule (27) riješi:

- $3^{2\log_9 12} = \left(3^2\right)^{\log_9 12} = 9^{\log_9 12} = 12$
- $4^{-\log_2 3} = \left(2^2\right)^{-\log_2 3} = 2^{-2\log_2 3} = 2^{\log_2 3^{-2}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $81^{\frac{1}{2}\log_3 7} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{2}\log_3 7} = 3^{2\log_3 7} = 3^{\log_3 7^2} = 7^2 = 49$

☺ **Primjer 6.** Pojednostavni izraz $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\sqrt{5}} 25) - \log_8(\log_5 \sqrt{5}) =$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\sqrt{5}} 25) - \log_8(\log_5 \sqrt{5}) =$$

$$= \log_{\frac{1}{2}}(\log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^2) - \log_{2^3}(\log_5 5^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \log_{2^{-1}}(\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_5 5) - \log_{2^3}(\frac{1}{2}\log_5 5) =$$

$$\Rightarrow$$

$$= -\log_2 4 - \frac{1}{3}\log_2 \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{3}\log_2 2^{-1} =$$

$$= 2 - \frac{1}{3}(-1) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

☺ **Primjer 7.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log_3(x-5)=2$

$$\log_3(x-5)=2 \qquad x-5=9$$
$$3^2=x-5 \qquad x=14$$

Provjera : $x-5>0 \Rightarrow 14-5>0 \Rightarrow 9>0$ **Rj: x = 14**

NAPOMENA: Provjera je obavezna → logaritam je definiran za **pozitivan numerus** $\begin{matrix}\log_a x \\ x>0\end{matrix}$.

☺ **Primjer 8.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log(x+3)=1-\log 2$

$$\log(x+3)=1-\log 2$$
$$\log(x+3)=\log 10-\log 2$$
$$\log(x+3)=\log\frac{10}{2}$$
$$\log(x+3)=\log 5 \quad /\text{anti}\log.$$
$$x+3=5$$
$$x=5-3 \Rightarrow x=2$$

Provjera : $x+3>0 \Rightarrow 2+3>0 \Rightarrow 5>0$ **Rj: x = 2**

☺ **Primjer 9.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log_2 \log_4(x-3)=0$.

$$\log_2 \log_4(x-3)=0$$
$$\log_4(x-3)=2^0$$
$$\log_4(x-3)=1$$
$$x-3=4^1$$
$$x=3+4$$
$$x=7$$

Provjera :

$$x-3>0 \Rightarrow 7-3>0 \Rightarrow 4>0$$
$$\log_4(x-3)>0 \Rightarrow og_4(7-3)>0 \Rightarrow \log_4 4>0 \Rightarrow 1>0$$ **Rj: x = 7**

☺ **Primjer 10.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log(x-1)+\log(x-2)=\log 6+\log(x-3)$.

$$\log(x-1)+\log(x-2)=\log 6+\log(x-3)$$
$$\log(x-1)\cdot(x-2)=\log 6\cdot(x-3) \quad /\text{anti}\log.$$
$$(x-1)\cdot(x-2)=6\cdot(x-3)$$
$$x^2-x-2x+2=6x-18$$
$$x^2-9x+20=0$$
$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm1}{2}$$
$$x_1=4, x_2=5$$

Provjera : $x_1=4$

$$x-1>0 \Rightarrow 4-1>0 \Rightarrow 3>0$$
$$x+2>0 \Rightarrow 4+2>0 \Rightarrow 6>0$$
$$x-3>0 \Rightarrow 4-3>0 \Rightarrow 1>0$$

$x_2=5$

$$x-1>0 \Rightarrow 5-1>0 \Rightarrow 4>0$$
$$x+2>0 \Rightarrow 5+2>0 \Rightarrow 7>0$$
$$x-3>0 \Rightarrow 5-3>0 \Rightarrow 2>0$$

Rj: $x_1 = 4, x_2 = 5$

☺ **Primjer 11.** Riješi logaritamsku jednadžbu $\log_3\left(x^2-2x\right)=1$.

$$\log_3\left(x^2-2x\right)=1$$
$$\log_3\left(x^2-2x\right)=\log_3 3 \quad /\text{anti}\log.$$
$$x^2-2x=3$$

$$x^2-2x-3=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}$$
$$x_1=3, x_2=-1$$

<u>*Provjera*</u> : $x_1 = 3$ $\quad x^2-2x>0 \Rightarrow 9-6>0 \Rightarrow 3>0$

$x_2 = -1$ $\quad x^2-2x>0 \Rightarrow 1+2>0 \Rightarrow 3>0$

Rj: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$

<u>ZADACI ZA VJEŽBU:</u>

1. Izračunaj: a) $\log_{\sqrt{2}} x=\frac{4}{3}$ b) $\log_{\frac{3}{4}} x=-2$
2. Logaritmiraj $x=10\frac{10\cdot\sqrt{a}}{b^2}$
3. Odredi x ako je: a) $\log x=\frac{1}{2}\log a-\log b-2\log c$ b) $\log x=-1-2\log a$
4. Primjenom formule (27) riješi: a) $3^{\log_{\sqrt{3}} 7-2\log_{\frac{1}{3}} 7}=$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2-\log_9 25}=$
5. Pojednostavni izraz $\log_8\log_4\sqrt{2}+\log_8\log_{\sqrt{2}} 4=$
6. Riješi logaritamsku jednadžbu: $\log(x-1)+\log(x-2)=2\log(x-3)$.
7. Riješi logaritamsku jednadžbu: $\log(x-3)+\log x=1$.
8. Riješi logaritamsku jednadžbu: $\log(3x-5)-\frac{1}{2}\log(x+1)=\log 25+\log\frac{1}{5}$.
9. Riješi logaritamsku jednadžbu $\log_2\left(x^2-3x\right)=2$.