



GIMNAZIJA I STRUKOVNA ŠKOLA JURJA DOBRILE PAZIN

NASTAVNI PREDMET: MATEMATIKA 3

Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe.

GORTAN ROBERT

Studen 2010.

Sadržaj

1. kvadratne enačbe i neenačbe.....	3
1.1. Oblici kvadratne enačbe.....	3
1.1.1. enačba oblike $ax^2 + c = 0$	3
1.1.2. enačba oblike $ax^2 + bx = 0$	4
1.1.3. enačba oblike $ax^2 + bx + c = 0$	4
1.2. diskriminanta kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$	5
1.3. vieteove formule kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$	6
1.4. enačbe, ki se svode na kvadratne.....	7
1.4.1. sistem kvadratne i linearne enačbe.....	7
1.4.2. bikvadratne enačbe.....	8
1.4.3. simetrične enačbe tretjega stopnja.....	8
1.5. kvadratna funkcija.....	9
1.5.1. graf kvadratne funkcije.....	9
1.5.2. nične točke i ekstremi kvadratne funkcije.....	9
1.6. kvadratne neenačbe.....	11

1. KVADRATNE JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE.

Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe obrađuju se u drugom razredu srednjeg obrazovanja. U narednim stranicama ponovit ćemo osnovne elemente koji su nam neophodni za razumijevanje i praćenje gradiva Matematike 3 i Matematike 4.

Definicija: KVADRATNA JEDNADŽBA je jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$ gdje su $a, b, c \in \mathfrak{R}$ takvi da je $a \neq 0$. Realni broj a naziva se vodeći koeficijent ili koeficijent uz kvadratni član (x^2), broj b je linearni koeficijent ili koeficijent uz linearni član (x) i c je slobodni koeficijent.

VAŽNO: Kvadratna jednadžba ima uvijek dva rješenja.

1.1. OBLICI KVADRATNE JEDNADŽBE.

1.1.1. JEDNADŽBA OBLIKA $ax^2 + c = 0$.

Ako je $b = 0, c \neq 0$ tada kvadratna jednadžba dobiva oblik $ax^2 + c = 0$.

Rješavamo kako slijedi:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \quad /: c \end{aligned}$$

te dobijemo

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{c}{a} \quad / \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned} \quad (1)$$

☉ **Primjer 1. Riješi kvadratnu jednadžbu:**

$$16x^2 - 9 = 0$$

$$16x^2 = 9 \quad /: 16$$

$$x^2 = \frac{9}{16} \quad / \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{3}{4}$$

ili

$$16x^2 - 9 = 0 \rightarrow \text{koristimo formulu za razliku kvadrata}$$

$$(4x - 3)(4x + 3) = 0 \rightarrow \text{produkt je 0 ako su članovi jednaki 0}$$

$$4x - 3 = 0 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4}$$

$$4x + 3 = 0 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{4}$$

☉ **Primjer 2. Riješi kvadratnu jednadžbu:**

$$25x^2 + 49 = 0$$

$$25x^2 = -49 \quad /: 25$$

$$x^2 = -\frac{49}{25} \quad / \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{7}{5}i$$

$$25x^2 + 49 = 0 \rightarrow \text{koristimo formulu za razliku kvadrata}$$

$$(5x + 7i)(5x - 7i) = 0 \rightarrow \text{produkt je 0 ako su članovi jednaki 0}$$

$$\text{ili } 5x + 7i = 0 \Rightarrow 5x = -7i \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{5}i$$

$$5x - 7i = 0 \Rightarrow 5x = 7i \Rightarrow x_2 = \frac{7}{5}i \quad \text{gdje je } i^2 = -1 \text{ ili } i = \sqrt{-1}$$

1.1.2. JEDNADŽBA OBLIKA $ax^2 + bx = 0$.

Ako je $b \neq 0, c = 0$ tada kvadratna jednadžba dobiva oblik $ax^2 + bx = 0$.

Rješavamo kako slijedi:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

te dobijemo

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ ax + b &= 0 \\ ax &= -b \quad /: a \cdot (2) \\ x_2 &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

☺ Primjer 1. Riješi kvadratne jednadžbe:

$$4x^2 + 10x = 0$$

$$2x(2x + 5) = 0$$

$$2x = 0 \quad /: 2 \Rightarrow x_1 = 0$$

a) $2x + 5 = 0$

$$2x = -5 \quad /: 2$$

$$x_2 = -\frac{5}{2}$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

b) $2x - 3 = 0$

$$2x = 3 \quad /: 2$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

1.1.3. JEDNADŽBA OBLIKA $ax^2 + bx + c = 0$.

Ako je $b \neq 0, c \neq 0$ tada kvadratna jednadžba dobiva oblik $ax^2 + bx + c = 0$.

Jednadžbu rješavamo formulom za rješenja kvadratne jednadžbe:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot (3)$$

☺ Primjer 1. Riješi kvadratne jednadžbe:

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -8, c = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$

a) $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$

$$x_1 = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{8 - 4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -6, c = 10$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

b) $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2}$

$$x_1 = \frac{6 + 2i}{2} = \frac{2(3 + i)}{2} = 3 + i$$

$$x_2 = \frac{6 - 2i}{2} = \frac{2(3 - i)}{2} = 3 - i$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješi jednađžbe: a) $3x^2 - 27 = 0$ b) $2x^2 + 32 = 0$
2. Riješi jednađžbe: a) $3x^2 + 9x = 0$ b) $4x^2 - 32x = 0$
3. Riješi jednađžbe: a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ b) $x^2 + x - 12 = 0$

1.2. DISKRIMINANTA KVADRATNE JEDNAĐŽBE $ax^2 + bx + c = 0$.

Diskriminanta kvadratne jednađžbe dana je formulom $D = b^2 - 4ac$ (4) tako da rješenja kvadratne jednađžbe možemo naći i formulom $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (5). Diskriminanta nam određuje tip ili kakva su rješenja kvadratne jednađžbe.

- ako je $D < 0$ tada su rješenja **kompleksni brojevi** (pr. $x_1 = 2 - i, x_2 = 2 + i$)
- ako je $D = 0$ tada su rješenja **jednaki realni brojevi** (pr. $x_1 = 3, x_2 = 3$ ili $x_{1,2} = 3$)
- ako je $D > 0$ tada su rješenja **različiti realni brojevi** (pr. $x_1 = 2, x_2 = -3$)

© **Primjer 1. Odredi tip rješenja i riješi kvadratne jednađžbe:**

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 1, c = -12$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$$

$$D = 1 + 48 = 49$$

a) $D > 0 \Rightarrow$ rješenja su realna i različita

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = 3$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -2, c = 2$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$D = 4 - 8 = -4$$

c) $D < 0 \Rightarrow$ rješenja su kompleksna i različita

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$x_1 = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i \quad x_2 = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 4, c = 4$$

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$D = 16 - 16 = 0$$

b) $D = 0 \Rightarrow$ rješenja su realna i jednaka

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4}{2}$$

$$x_{1,2} = -2$$

1.3. VIETEOVE FORMULE KVADRATNE JEDNADŽBE $ax^2 + bx + c = 0$.

Vieteove formule dobijemo zbrajanjem i množenjem formule za rješenja kvadratne jednadžbe.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \dots = \frac{c}{a}$$

☀ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (6) su formule za zbroj i umnožak rješenja kvadratne

jednadžbe.

☀ **Kako odrediti kvadratnu jednadžbu ako znamo rješenja? → Koristimo Vieteove formule.**

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad /: a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{te koristimo } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Formula za određivanje kvadratne jednadžbe ako su dana rješenja glasi

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \quad (7)$$

☉ **Primjer 1. Odredi zbroj i umnožak rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2 - 3x + 5 = 0$**

$$2x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -3, c = 5$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$

☉ **Primjer 2. Odredi kvadratnu jednadžbu ako je jedno rješenje $2 + i$.**

$$x_1 = 2 + i \Rightarrow x_2 = 2 - i$$

$$x^2 - (2 + i + 2 - i)x + (2 + i)(2 - i) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - i^2 = 0$$

koristimo formulu (7)

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \quad \text{jer je } i^2 = -1$$

☉ **Primjer 3. Odredi kvadratnu jednadžbu ako su rješenja 3 i -5 .**

$$x_1 = 3, x_2 = -5$$

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredi tip rješenja i riješi kvadratne jednadžbe:

a. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

b. $x^2 - x - 12 = 0$

2. Odredi zbroj i umnožak rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 5x + 10 = 0$

3. Odredi kvadratnu jednadžbu ako je jedno rješenje -3 -2i.

4. Odredi kvadratnu jednadžbu ako su rješenja -2 i 5.

5. Odredi, bez rješavanja jednažbe, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ako je kvadratna jednadžba $2x^2 + 5x + 3 = 0$.

(uputa: koristi Vieteove formule).

1.4. JEDNADŽBE KOJE SE SVODE NA KVADRATNE.

Slijede primjeri zadataka koje možemo riješiti korištenjem naučenog o kvadratnoj jednadžbi.

1.4.1. SUSTAV KVADRATNE I LINEARNE JEDNADŽBE.

☺ **Primjer 1. Riješi sustav** $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 3xy + x + 2 = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$.

Izrazimo nepoznanicu y iz linearne jednadžbe i uvrstimo u kvadratnu jednadžbu.

$2x - y = 5 \Rightarrow y = 2x - 5$ uvrstimo u kvadratnu jednadžbu

$x^2 - 2y^2 + 3xy + x + 2 = 0$

$x^2 - 2(2x - 5)^2 + 3x(2x - 5) + x + 2 = 0$ kvadriramo

$x^2 - 2(4x^2 - 20x + 25) + 6x^2 - 15x + x + 2 = 0$

$x^2 - 8x^2 + 40x - 50 + 6x^2 - 14x + 2 = 0$

$-x^2 + 26x - 48 = 0 \quad / \cdot (-1)$

$x^2 - 26x + 48 = 0$ pa su rješenja jednadžbe

$x_1 = 2$ i $x_2 = 24$ uvrštavamo u $y = 2x - 5$

$y_1 = 2x_1 - 5 = 4 - 5 = -1$ $y_2 = 2x_2 - 5 = 48 - 5 = 43$

Rješenja sustava
(2,-1) i (24,43)

☼ Često koristimo formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (8) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (9).

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješi sustave jednačbi: a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$
2. Riješi sustave jednačbi: a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$

1.4.2. BIKVADRATNE JEDNAČBE.

Bikvadratne jednačbe su jednačbe oblika $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (10) koje rješavamo uvođenjem supstitucije $t = x^2$ i svodenjem na kvadratnu jednačbu $at^2 + bt + c = 0$ čija su rješenja t_1 i t_2 .

Uvrštavanjem u supstituciju dobijemo $t_1 = x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$ (11)
 $t_2 = x^2 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$

☉ **Primjer 1. Riješi jednačbu** $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \Rightarrow t = x^2 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = 2$$

$$3 = x^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

$$2 = x^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješi jednačbe: a) $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$ b) $x^4 + 14 - 9x^2 = 0$
2. Riješi jednačbe: a) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ b) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

1.4.3. SIMETRIČNE JEDNAČBE TREĆEG STUPNJA.

Simetrične jednačbe trećeg stupnja su oblika $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ (12). Rješavamo ih grupiranjem i korištenjem formule $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0$$

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(ax^2 - ax + a + bx) = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$ax^2 + x(b - a) + a = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \dots$$

☉ **Primjer 1. Riješi jednadžbu** $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$2x^3 - 2 + 3x^2 - 3x = 0$$

$$2(x^3 - 1) + 3x(x - 1) = 0$$

$$2(x - 1)(x^2 + x + 1) + 3x(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(2x^2 + 2x + 2 + 3x) = 0$$

$$(x - 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2, x_3 = -\frac{1}{2}$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješi jednadžbe:

a. $6x^3 - 19x^2 - 19x + 6 = 0$

b. $4x^3 - 14x^2 + 14x - 4 = 0$

1.5. KVADRATNA FUNKCIJA.

Definicija: KVADRATNA FUNKCIJA je funkcija oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ (13) gdje su $a, b, c \in \mathfrak{R}$ takvi da je $a \neq 0$. Zapisujemo je $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$.

1.5.1. GRAF KVADRATNE FUNKCIJE.

☀ Graf kvadratne funkcije je PARABOLA. Otvor parabole ovisi o kvadratnom koeficijentu a .

- ako je $a > 0$, tada je otvor parabole «prema gore» i parabola ima oblik \cup
- ako je $a < 0$, tada je otvor parabole «prema dole» i parabola ima oblik \cap

1.5.2. NUL TOČKE I EKSTREMI KVADRATNE FUNKCIJE.

☀ Karakteristične točke koje nam određuju parabolu su nul točke i ekstremi.

☀ NUL TOČKE su točke u kojima graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ siječe os x .

Dobivamo ih rješavanjem pripadne kvadratne jednadžbe. $ax^2 + bx + c = 0$

Diskriminanta nam određuje koliko nultočaka ima kvadratna funkcija..

- ako je $D < 0$ tada kvadratna funkcija nema realnih nultočaka
- ako je $D = 0$ tada kvadratna funkcija ima jednu dvostruku nul točku
- ako je $D > 0$ tada kvadratna funkcija ima dvije nultočke

☀ **EKSTREMI KVADRATNE FUNKCIJE** su točke u kojima kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ poprima najveću ili najmanju vrijednost. Točka ekstrema se naziva

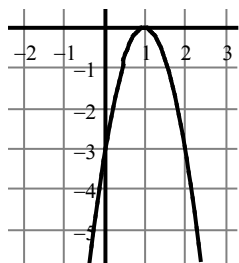
TJEME i označava se s $T(x_0, y_0)$. Koordinate tjemena računamo na nekoliko načina:

- Ako kvadratna funkcija ima dvije nul točke tada apscisu tjemena računamo po formuli $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (14). Izračunatu koordinatu uvrštavamo u funkciju te dobijemo drugu koordinatu ili ordinatu tjemena. $y_0 = f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$ (15) te je tjeme $T(x_0, y_0)$.
- Ako kvadratna funkcija ima jednu nul točku tada je ona ujedno i prva koordinata ili apscisu tjemena. Drugu koordinatu ili ordinatu tjemena izračunavamo kao u prethodnom slučaju.
- Ako kvadratna funkcija nema realnih nultočaka tada apscisu tjemena računamo po formuli $x_0 = -\frac{b}{2a}$, a ordinatu po $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$ ili $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. (16)

NAPOMENA: Na ovaj način možemo računati koordinate tjemena i ako imam dvije ili jednu realnu nul točku.

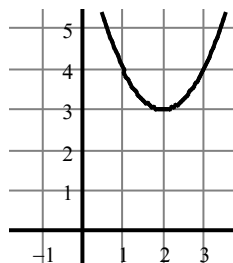
- Ako je $a > 0$ tada je ekstrem kvadratne funkcije nazivamo i točka maksimuma ili kraće **MAKSIMUM**, a ako je $a < 0$ tada je ekstrem točka minimuma ili kraće **MINIMUM**.

- Kako koeficijent uz kvadratni član a i diskriminanta određuju izgled parabole?



$D = 0 \rightarrow$ kvadratna funkcija ima jednu nul točku

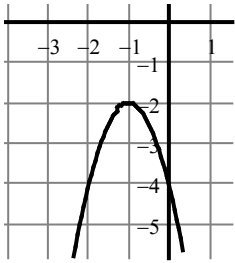
$a < 0 \rightarrow$ parabola ima otvor prema dole \cap



$D < 0 \rightarrow$ kvadratna funkcija nema realne nul točke

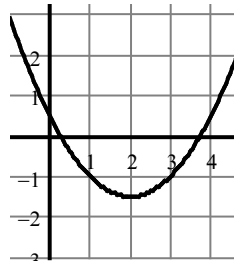
$a > 0 \rightarrow$ parabola ima otvor prema gore \cup

NASTAVNO PISMO 1 - MATEMATIKA 3 – TEHNIČAR ZA ELEKTROTEHNIKU



$D < 0 \rightarrow$ kvadratna funkcija nema realne nul točke

$a < 0 \rightarrow$ parabola ima otvor prema dole \cap



$D > 0 \rightarrow$ kvadratna funkcija ima dvije različite nul točke

$a > 0 \rightarrow$ parabola ima otvor prema gore \cup

☉ **Primjer 1. Odredi koordinatu tjemena kvadratne funkcije** $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Odredimo nul točke kvadratne funkcije.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$$

$D > 0 \Rightarrow$ dvije nul točke

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$$

$$NT_1(2,0), NT_2(4,0)$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \text{ apscisa tjemena}$$

$$y_0 = f(x_0) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1 \text{ ordinata}$$

$$T(x_0, y_0) \Rightarrow T(3, -1) \text{ TJEME}$$

$a = 1 > 0$ tjeme je točka minimuma

☉ **Primjer 2. Odredi koordinatu tjemena kvadratne funkcije** $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

Odredimo nul točke kvadratne funkcije.

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10$$

$$D = 36 - 40 = -4$$

$D < 0 \Rightarrow$ nema realnih nul tocaka

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \text{ apscisa tjemena}$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a} = -\frac{-4}{4} = 1 \text{ ordinata}$$

$$T(x_0, y_0) \Rightarrow T(3, 1) \text{ TJEME}$$

$a = 1 > 0$ tjeme je točka minimuma

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. **Odredi nul točke, tjeme te nacrtaj graf kvadratne funkcije** $f(x) = x^2 + 4x + 3$.
2. **Odredi nul točke, tjeme te nacrtaj graf kvadratne funkcije** $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$.
3. **Odredi nul točke, tjeme te nacrtaj graf kvadratne funkcije** $f(x) = -x^2 - 8x + 9$.

1.6. KVADRATNE NEJEDNADŽBE.

Kada znak jednakosti u kvadratnoj jednačini $ax^2 + bx + c = 0$ zamjenimo s znakovima $\leq, \geq, <, >$ dobijemo KVADRATNE NEJEDNADŽBE.

NASTAVNO PISMO 1 - MATEMATIKA 3 – TEHNIČAR ZA ELEKTROTEHNIKU

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \quad ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad ax^2 + bx + c > 0$$

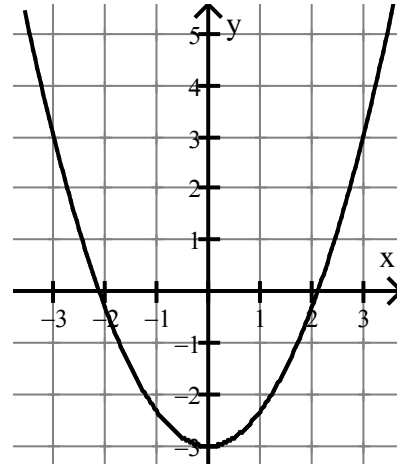
Rješenja kvadranih nejednadžbi su intervali realnih brojeva. Otvoreni (a, b) , zatvoreni $[a, b]$, poluotvoreni $(a, b]$ ili poluzatvoreni $[a, b)$ interval gdje su a i b krajnje točke ili granice intervala.

☉ **Primjer 1.** Riješi nejednadžbu $\frac{3}{4}x^2 - 3 > 0$.

Odredit ćemo nul točke te nacrtati parabolu.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x^2 - 3 &= 0 & x^2 &= 4 \quad / \sqrt{} \\ \frac{3}{4}x^2 &= 3 & x_1 &= -2, x_2 = 2 \\ \frac{3}{4}x^2 &= 3 \quad / \cdot \frac{4}{3} & NT_1 &(-2,0), NT_2(2,0) \end{aligned}$$

Tjeme možemo izračunati ako želimo precizno nacrtati graf funkcije tj. parabolu. $\rightarrow T(0, -3)$



Funkcija je pozitivna ($f(x) \geq 0, f(x) > 0$) na intervalima gdje je parabola «iznad osi x»

Funkcija je negativna ($f(x) \leq 0, f(x) < 0$) na intervalima gdje je parabola «ispod osi x».

Funkcija je pozitivna u intervalima $(-\infty, -2)$ i $(2, +\infty)$, a negativna na intervalu $(-2, 2)$.

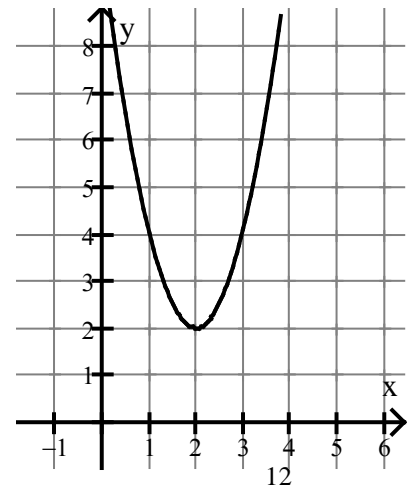
Rješenje nejednažbe $\frac{3}{4}x^2 - 3 > 0$ je $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

☉ **Primjer 2.** Riješi nejednadžbu $f(x) < 0$ ako je zadana funkcija $f(x) = 2x^2 - 8x + 10$.

Odredit ćemo nul točke te nacrtati parabolu.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 10 &= 0 \quad /: 2 & x_0 &= \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2 \\ x^2 - 4x + 5 &= 0 & y_0 &= -\frac{D}{4a} = \frac{16}{8} = 2 \\ D &= b^2 - 4ac = -16 & T(x_0, y_0) &\Rightarrow T(2, 2) \\ D < 0 & \text{nema realnih nul tocaka} \end{aligned}$$

Tjeme možemo izračunati ako želimo precizno nacrtati graf funkcije tj. parabolu. $\rightarrow T(2, 2)$



Funkcija je pozitivna za sve realne brojeve x , pa nejednadžba $f(x) < 0$ nema rješenja ili

$$x \in \emptyset$$

➤ Napomena: Rješenje nejednadžbe $f(x) > 0$ je cijeli skup \mathbb{R} ili $x \in \mathbb{R}$

☉ Primjer 3. Riješi nejednadžbu $\frac{3}{4}x^2 - 3 \leq 0$.

➤ Nul točke $NT_1(-2,0), NT_2(2,0)$ i tjeme $T(0,-3)$ smo odredili u primjeru 1.

➤ Na crtežu vidimo da je funkcija negativna na intervalu $[-2,2]$.

Rješenje nejednažbe $\frac{3}{4}x^2 - 3 \leq 0$ je $x \in [-2,2]$.

☉ Primjer 4. Riješi nejednadžbu $(x+2)(x-2) < 0$.

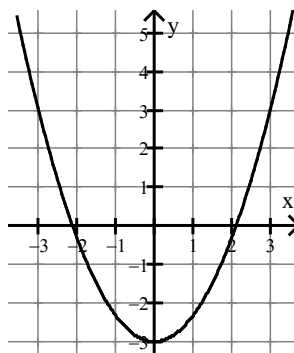
Odredimo nul točke i nacrtamo parabolu. Kad bi pomnožili zagrade, nejednadžba bi imala oblik $x^2 - 4 < 0$. Koeficijent uz kvadratni član $a > 0$ pa je otvor parabole prema gore.

$$(x+2)(x-2) = 0$$

$$x+2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$$

$$x-2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$NT_1(-2,0), NT_2(2,0)$$



Rješenje nejednažbe $(x+2)(x-2) < 0$ je $x \in (-2,2)$.

NAPOMENA: U nejednadžbama u kojima se javljaju znakovi nejednakosti \leq, \geq krajnje točke ili granice intervala su uključene u interval te je riječ o intervalima $(-\infty, a]$, $[a, b]$ ili $[b, +\infty)$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješi nejednadžbu $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

2. Riješi nejednadžbu $x^2 - 3x - 4 < 0$.

3. Riješi nejednadžbu $-2x^2 + x + 1 > 0$.

➤ **NAPOMENA:** Množenjem ili dijeljenjem nejednadžbe s negativnim brojem, znak

nejednakosti se mijenja. Npr: $-2x < 4 \quad /: (-2)$
 $x > -2$